Übungsaufgaben
Algebra und Funktionentheorie, WS 2011/12

Serie 6 zum 29.11.11

1. (i) Bestimmen Sie zwei verschiedene Kompositionsreihen für die abelsche Gruppe
   $$\mathbb{Z}/(12) \oplus \mathbb{Z}/(10)$$
   und geben Sie jeweils (unter Beachtung der Reihenfolge) die Liste der (Isomorphietypen der) Faktoren durch ihre Elementarteiler an.

   (ii) Beweisen Sie, dass die abelsche Gruppe $\mathbb{Z}$ keine Kompositionsreihe besitzt.

2. M sei ein Modul über dem Ring R und N_1, N_2, K Untermoduln mit folgenden Eigenschaften:

   (i) $N_2 \subseteq N_1$

   (ii) $K \cap N_1 = \mathbf{0}$

   Beweisen Sie:
   $$(K + N_1)/(K + N_2) \cong N_1/N_2.$$

3. $(G, \cdot)$ sei Gruppe. Für $g \in G$ definieren wir $\varphi_g : G \longrightarrow G$ durch $\varphi_g(x) := g^{-1} \cdot x \cdot g$. Zeigen Sie:

   (1) φ_g ist ein Isomorphismus (Isomorphismen $G \to G$ heißen auch *Automorphismen* von G, die Automorphismen φ_g heißen *innere Automorphismen*).

   (2) Es sei $\mathrm{Z}(G) := \{x \in G \mid \forall g \in G : x \cdot g = g \cdot x\}$. Die Mengen $U_g := \{x \mid \varphi_g(x) = x\}$ bilden Untergruppen von G und $\mathrm{Z}(G)$ ist Durchschnitt aller U_g mit $g \in G$.

   (3) $\mathrm{Z}(G)$ ist Normalteiler in G.

   (4) Die Menge $\mathrm{Inn}(G)$ der Automorphismen φ_g mit $g \in G$ ist ein Normalteiler in der Gruppe aller Automorphismen von G.

   (5) $\mathrm{Inn}(G) \cong G/\mathrm{Z}(G)$.

4.* k sei ein endlicher Körper und $k^* := k \setminus \{0\}$ seine multiplikative Gruppe (Operation ist die Einschränkung der Multiplikation des Körpers auf die Teilmenge k^*).

   Beweisen Sie: Die Gruppe k^* ist zyklisch, d.h. von einem Element erzeugt.

   Hinweis 1. Nicht alle endlichen Körper sind isomorph zu den schon bekannten Primkörpern. Eine Übersicht gibt es später, hier verwenden wir das aber nicht.

   Hinweis 2. Aus der Definition des Körpers ergibt sich, dass k^* eine abelsche Gruppe ist. Für endliche abelsche Gruppen haben wir einen Klassifikationssatz bewiesen …