Übungsaufgaben
Algebra und Funktionentheorie, WS 2011/12

Serie 7 zum 6.12.11

1. Mit $I,\ J \in \mathrm{M}(2;\mathbb{C})$ bezeichnen wir die Matrizen $I := \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}$ und $J := \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

   G sei die von I und J erzeugte Untergruppe der Gruppe $\mathrm{GL}(n;\mathbb{C})$ aller regulären komplexen 2×2-Matrizen. Zeigen Sie:

   (i) G besitzt 8 genau Elemente.

   (ii) G ist nicht kommutativ.

   (iii) Jede Untergruppe von G ist Normalteiler.

   (iv) G ist auflösbar.

   (v) Geben Sie die Kompositionsindizes von G an.

2. G sei die alternierende Gruppe A_5.

   (i) Zeigen Sie, dass die von dem 5-Zyklus (12345) erzeugte Untergruppe kein Normalteiler ist und bestimmen Sie die Anzahl der 5-Sylowgruppen in G.

   (ii) Bestimmen Sie alle 3-Sylowgruppen der Gruppe G.

3. (i) Wieviele 5-Sylowgruppen enthält eine Gruppe Ordnung 175?

   (ii) Wieviele 7-Sylowgruppen enthält eine Gruppe Ordnung 175?

   (iii) Wieviele einfache Gruppen der Ordnung 175 gibt es?

4.* Auf dem reellen Standardraum $V = \mathbb{R}^n$ operiert eine Gruppe G aus regulären Matrizen mittels der üblichen Matrizenmultiplikation. Geben Sie in jedem der folgenden Fälle die Orbits an:

   (i) $G = \mathrm{GL}(n)$ ist die lineare Gruppe.

   (ii) $G = \mathrm{O}(n)$ ist die orthogonale Gruppe.

   (iii) $G = \mathrm{SO}(n)$ ist die spezielle orthogonale Gruppe.

   (iv) G ist die Gruppe der regulären Diagonalmatrizen.

   (v) G ist die Gruppe der regulären oberen Dreiecksmatrizen.