Übungsaufgaben
Algebra und Funktionentheorie, WS 2011/12

Serie 8 zum 13.12.11

1. Gruppenoperationen: G sei eine Gruppe, die auf der Menge M operiert.
   (i) Beweisen Sie: Für beliebige m, m' eines Orbits sind die Isotropiegruppen $\mathrm{Sta}_G(m)$ und $\mathrm{Sta}_G(m')$ zueinander konjugiert (haben also insbesondere gleichviele Elemente).
   (ii) G sei die Gruppe der Drehungen der euklidischen Ebene $M := R^2$ mit der üblichen Operation (gegeben durch Matrizenmultiplikation). Wieviele Elemente haben die Isotropiegruppen der Orbits?
   (iii) G sei eine Gruppe der Ordnung 55, die auf einer Menge M mit 39 Elementen operiert. Beweisen Sie: Es existiert ein Orbit der Länge 1.

2. $G_1, \ldots, G_n$ seien Gruppen. Auf dem kartesischen Produkt $G_1 \times \ldots \times G_n$ definieren wir eine Operation mittels $(g_1, \ldots, g_n) \cdot (g'_1, \ldots, g'_n) := (g_1 g'_1, \ldots, g_n g'_n)$.
   (1) Beweisen Sie: $G_1 \times \ldots \times G_n$ ist mit dieser Operation eine Gruppe.
   (2) Es sei nun G eine Gruppe und $P_1, \ldots, P_n$ Untergruppen mit folgenden Eigenschaften:
      (i) Die Untergruppen P_i sind Normalteiler in G.
      (ii) Die Untergruppen P_i kommutieren elementweise.
      (iii) Jedes Element $g \in G$ besitzt eine eindeutige Darstellung $g = g_1 \cdot \ldots \cdot g_n$ mit $g_i \in P_i$.

   Dann ist G isomorph zur Gruppe $P_1 \times \ldots \times P_n$ (mit der zuvor definierten Operation).

3. Für welche Primzahlen p mit $p \equiv 2 \bmod(3)$ existiert eine nichtkommutative Gruppe der Ordnung $3p$?

4.* Mit A bezeichnen wir die Menge aller $\alpha \in \mathbb{C}$, für die ein nichtkonstantes Polynom $f \in \mathbb{Q}[X]$ existiert mit $f(\alpha) = 0$. Zeigen Sie:
   (i) A ist ein Unterkörper der komplexen Zahlen; er enthält $\mathbb{Q}$.
   (ii) A hat unendlichen Grad über dem Körper der rationalen Zahlen.
   (iii) A ist abzählbar.