Übungsaufgaben
Algebra und Funktionentheorie, WS 2011/12

Serie 9 zum 3.1.12

1. Es sei $K \supseteq \mathbb{Q}$ die Körpererweiterung $K := \mathbb{Q}[\sqrt{2}, i]$. Bestimmen Sie ein primitives Element, d.h. ein $\alpha \in K$ mit $K = \mathbb{Q}[\alpha]$.

2. Bestimmen Sie in jedem der folgenden Fälle den Grad der Körpererweiterung $K := k[\alpha]$ über dem Unterkörper k und geben Sie dabei das Minimalpolynom von α an.
   (i) $k = \mathbb{Q}$ und $\alpha = \sqrt[5]{3}$
   (ii) $k = \mathbb{Q}$ und $\alpha = e^{\frac{2\pi i}{5}}$
   (iii) k ist der Primkörper von $K := \mathbb{Z}[i]/(7)$ und α die Klasse von $i \in \mathbb{C}$

3. (i) Ist $f = X^5 - 10X - 2$ irreduzibel in $\mathbb{Q}[X]$?
   (ii) Für eine beliebige Primzahl p gibt es einen natürlichen $\mathbb{Z}$-Algebrahomomorphismus $\varphi_p : \mathbb{Z}[X] \to \mathbb{F}_p[X]$ (Reduktion der Koeffizienten mod p).
   Sei nun $f = a_n X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \ldots + a_0 \in \mathbb{Z}[X]$ und $a_n \not\equiv 0 \bmod p$.
   Zeigen Sie: Ist $\varphi_p(f)$ irreduzibel, so ist auch f irreduzibel (als Polynom über $\mathbb{Q}$).
   (iii) Verwenden Sie die Eigenschaft (ii) für eine kleine Primzahl p um zu beweisen, dass $f = X^4 + 15X^3 + 7$ in $\mathbb{Q}[X]$ irreduzibel ist.
   Anmerkung: Über einem endlichen Körper gibt es nur endlich viele Polynome von kleinerem Grad - im Prinzip können Sie also systematisch testen. Vorzugsweise verwenden Sie allerdings bekannte Eigenschaften von Polynomen.

4.* K sei ein endlicher Körper mit q Elementen.
   (i) Bezeichnet E den Zerfällungskörper des Polynoms $f = X^{q^n} - X \in K[X]$, so besitzt E genau q^n Elemente.
   (ii) Zwei endliche Körper sind genau dann isomorph, wenn sie gleichviele Elemente haben.
   (iii) Für alle $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ existiert ein irreduzibles Polynom vom Grad n über K.