Übungsaufgaben
Algebra und Funktionentheorie, WS 2011/12

Serie 10 zum 10.1.12

1. $K \supseteq k$ sei eine endliche Körpererweiterung und $\alpha \in K$. Wie Sie bereits wissen, ist dann α algebraisch über k, besitzt also ein Minimalpolynom aus $k[X]$.

   $$\varphi_\alpha : K \to K\,,\ z \mapsto \alpha \cdot z$$

   sei nun die durch Multiplikation mit einem festen Element $\alpha \in K$ definierte Abbildung.

   (i) Zeigen Sie: φ_α ist linearer Endomorphismus des k-Vektorraumes K.

   (ii) Beweisen Sie: Das Minimalpolynom des algebraischen Elements α stimmt mit dem Minimalpolynom des Endomorphismus φ_α überein.

   (iii) Wir wählen $k = \mathbb{Q}$ und $K = \mathbb{Q}[\sqrt[3]{5}]$. Bestimmen Sie mittels (ii) das Minimalpolynom von $\alpha = 2 + \sqrt[3]{5} + \sqrt[3]{25}$ über $\mathbb{Q}$.

2. Es sei $f := X^2 + aX + b \in \mathbb{Q}[X]$ ein quadratisches Polynom.

   (i) Bestimmen Sie den Zerfällungskörper von f über $\mathbb{Q}$ in Abhängigkeit von den rationalen Koeffizienten a und b.

   (ii) Geben Sie in allen unter (i) erhaltenen Fällen die Galoisgruppe von f an.

3. Bestimmen Sie die Galoisgruppe des Polynoms $f = X^4 - 2$ über $\mathbb{Q}$, ihre Untergruppen sowie alle Unterkörper des Zerfällungskörpers von f.

4.* k sei ein Körper. Wir diskutieren hier die folgende Eigenschaft:

   ($*$) Die irreduziblen Polynome aus $k[X]$ besitzen keine mehrfachen Nullstellen in den Erweiterungskörpern von k.

   Im Fall $\mathrm{char}(k) = 0$ ist ($*$) offenbar immer erfüllt. Von nun an sei k ein Körper der Charakteristik $p > 0$.

   (i) Zeigen Sie: ($*$) ist dazu äquivalent, dass jedes Element von k eine p-te Wurzel besitzt.

   Anleitung zum Beweis. ($*$) sei erfüllt. Zeigen Sie: Aus $a \notin k^p$ (:= Menge der p-ten Potenzen) folgt, daß die irreduziblen Faktoren des Polynoms $f = X^p - a$ vom Grad ≥ 2 sind.

   (ii) Zeigen Sie: Jeder endliche Körper besitzt die Eigenschaft ($*$).