Übungsaufgaben
Algebra und Funktionentheorie, WS 2011/12

Serie 11 zum 17.1.12

1. In der Ebene ist eine Strecke der Länge 1 gegeben. Entscheiden Sie in jedem der folgenden Fälle, ob sich daraus mit Zirkel und Lineal eine Strecke der Länge α konstruieren lässt.
   (i) $\alpha = 2 + \sqrt[3]{5} + \sqrt[3]{25}$
   (ii) $\alpha = 1 + \sqrt{2} + \sqrt[4]{2}$
   Anmerkung: Unter (i) ist α die algebraische Zahl, die bereits in 10.1 (iii) untersucht wurde.

2. Rechnen mit komplexen Zahlen
   (i) Wir wählen $\zeta, z \in \mathbb{C}$ mit $\zeta \neq z$. Bestimmen Sie Realteil und Imaginärteil von $\dfrac{\zeta + z}{\zeta - z}$ als Ausdruck der Polarkoordinaten von ζ und z.
   (ii) Zeigen Sie: Die unendliche Reihe $\sum_n f_n(z)$ mit $f_n(z) = \dfrac{1}{z^2 + n^2}$ ist im Inneren jedes Kreises $\{z \mid |z| < M\} \subseteq \mathbb{C}$ gleichmäßig konvergent (M bezeichnet eine positive reelle Zahl). Beachten Sie dabei, dass die Summation erst mit hinreichend großen Zahlen n beginnen darf!

3. Wege in der komplexen Ebene
   (i) Die nachfolgend angegebenen Teilmengen $U \subseteq \mathbb{C}$ enthalten die Punkte z_1, z_2. Geben Sie – sofern möglich – jeweils einen Weg von z_1 nach z_2 an! Falls kein solcher Weg existiert, ist dafür ein Nachweis gefordert.
      a) $U = \{z \mid |z| < 3\}$, $z_1 = 1 + i$, $z_2 = 1 - i$
      b) $U = \{z \mid |z| = 2\}$, $z_1 = 1 + i\sqrt{3}$, $z_2 = 2i$
      c) $U = \{z \mid 1 < |z| \leq 5\}$, $z_1 = 1 - 2i$, $z_2 = -1 + 2i$
      d) $U = \{z \mid |z| < 2 \text{ oder } 3 < |z| < 4\}$, $z_1 = 1 - i$, $z_2 = 3 - 2i$
   (ii) Allgemeiner sei $U \subseteq \mathbb{C}$ eine nichtleere Teilmenge. Für $z_1, z_2 \in U$ definieren wir $z_1 \sim z_2$ durch die Bedingung, dass ein Weg von z_1 nach z_2 existiert.
   Begründen Sie:
      a) $\sim$ ist eine Äquivalenzrelation auf U.
      b) Ist U offen in $\mathbb{C}$, so ist jede Klasse dieser Äquivalenzrelation ein Gebiet.

4. Wir betrachten die folgenden beiden Potenzreihen, deren Konvergenz für alle $z \in \mathbb{C}$ untersucht werden soll:
   $$(*) \quad \sum_n \frac{1}{n} z^n \quad \text{und} \quad (**) \quad \sum_n \frac{1}{n(n+1)} z^n.$$
   Beweisen Sie:
   (i) Beide Reihen haben den Konvergenzradius 1.
   (ii) Die Reihe $(**)$ konvergiert auf dem gesamten Einheitskreis $|z| = 1$.

(iii) Die Reihe $(*)$ konvergiert auf $\{z \mid |z| = 1, z \neq 1\}$ und divergiert für $z = 1$.

Anleitung: Zeigen Sie zunächst, dass für $z \neq 1$ und natürliche Zahlen $k > 1$ die folgende Identität gilt:

$$(***) \qquad \sum_{n=1}^{k} \frac{1}{n} z^n = \frac{z}{1-z} \left(\sum_{n=1}^{k-1} \frac{1}{n(n+1)} - \sum_{n=1}^{k-1} \frac{1}{n(n+1)} z^n + \frac{1-z^k}{k} \right)$$