Übungsaufgaben
Algebra und Funktionentheorie, WS 2011/12

Serie 12 zum 24.1.12

1. In welchen Punkten ihres Definitionsbereichs ist die nachfolgende komplexe Funktion f differenzierbar? Geben Sie an diesen Stellen ihre Ableitung an!

   (i) $f(z) = |z|$

   (ii) $f(z) = |z|^2$

   (iii) $f(z) = \dfrac{z^2+1}{z^3-1}$

   (iv) $f(z) = \dfrac{\exp(z^2)}{\exp(z-3)}$

   (v) $f(z) = \dfrac{\sin(z+1)}{\exp(z^2)}$

2. Wir definieren die komplexe Funktion $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ für $z = x + iy$ (mit $x, y \in \mathbb{R}$) durch

$$f(z) = \begin{cases} \dfrac{x^3(1+i) - y^3(1-i)}{x^2+y^2} & \text{für } z \neq 0 \\ 0 & \text{für } z = 0 \end{cases}$$

   Beweisen Sie:

   (i) f ist stetig an der Stelle $z = 0$.

   (ii) f erfüllt die Cauchy-Riemannschen Differenzialgleichungen in $z = 0$.

   (iii) Die komplexe Ableitung $f'(0)$ existiert nicht.

3. Wir betrachten die komplexe Funktion $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, die durch $f(z) = \cos(z)$ gegeben ist. Zeigen Sie: f ist nicht beschränkt.

   Hinweis: Als Hilfsmittel sind hier nur solche Aussagen zugelassen, die bereits in der Vorlesung bewiesen wurden.

4.* Es sei $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ eine Potenzreihe, deren Koeffizienten für eine feste Zahl $k > 0$ und alle $n \in \mathbb{N}$ die Eigenschaft $a_{n+k} = a_n$ besitzen. Beweisen Sie:

   (i) $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ ist eine für $|z| < 1$ konvergente Potenzreihe.

   (ii) Es existieren Polynome p, $q \in \mathbb{C}[X]$, so dass für $|z| < 1$ gilt:

$$f(z) = \frac{p(z)}{q(z)} \text{ und } q(z) \text{ hat höchstens Einheitswurzeln als Nullstellen.}$$