Übungsaufgaben
Algebra und Funktionentheorie, WS 2011/12

Serie 13 zum 31.1.12

1. $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$ sei ein glatter Weg, so bezeichne $L(\gamma) = \int_a^b |\gamma'(t)| dt$ die Länge von γ.
   (i) Zeigen Sie: Ist $\Theta,\ r \in \mathbb{R}$ seien positive Zahlen sowie $z_0 \in \mathbb{C}$ und γ der durch $\gamma(t) := z_0 + r \cdot \exp(it)$ mit $t \in [0, \Theta]$ gegebene Weg, dann gilt gilt $L(\gamma) = r \cdot \Theta$.
   (ii) $\gamma : [0, 1] \to \mathbb{C}$ sei durch $\gamma(t) := t^2 + 2it$ gegeben. Bestimmen Sie $L(\gamma)$.

2. $\gamma : [0, 1] \to \mathbb{C}$ bezeichne den Weg, der durch $\gamma(t) := t(t + i)$ gegeben ist. Verwenden Sie die schon bekannte Formel
   $$\int_\gamma f(z)\mathrm{d}z = \int_\gamma f(\gamma(t))\gamma'(t)\mathrm{d}t$$
   zur Bestimmung der nachfolgenden Integrale:
   (i) $\int_\gamma z^3 \,\mathrm{d}z$
   (ii) $\int_\gamma \mathrm{Re}(z) \,\mathrm{d}z$
   (iii) $\int_\gamma z \cdot \overline{z} \,\mathrm{d}z$

3. Mit K_r bezeichnen wir den durch $\gamma_r(t) := z_0 + r \cdot \exp(it)$ mit $t \in [0, 2\pi]$ gegebenen Kreis. $f : U \to \mathbb{C}$ sei eine in dem Gebiet U stetige Funktion und $z_0 \in U$. Wir wählen r so klein, dass $K_r \subseteq U$.
   Beweisen Sie:
   (i) $\lim\limits_{r\to 0} \int_{\gamma_r} f(z) \,\mathrm{d}z = 0$,
   (ii) $\lim\limits_{r\to 0} \int_{\gamma_r} \frac{f(z)}{z - z_0} \,\mathrm{d}z = 2\pi i f(z_0)$.
   Hinweis: Ist M eine Konstante und γ eine Kontur der Länge L, sowie $|f(z)| \leq M$ auf γ (f stetige Funktion auf dem betr. Gebiet), so gilt $|\int_\gamma f| \leq M \cdot L$.

4. γ sei eine geschlossene Kontur in $\mathbb{C}$. Wir setzen
   $$F := \frac{1}{2i} \int_\gamma \overline{z} \,\mathrm{d}z\,.$$
   (i) Zeigen Sie, dass F eine reelle Zahl ist.
   (ii) Beweisen Sie: Es ist $F = -\int_\gamma \mathrm{Im}(z) \,\mathrm{d}\,z = \frac{1}{i} \int_\gamma \mathrm{Re}(z) \,\mathrm{d}z$.
   Bemerkung:
   Wer die ursprüngliche Version mit dem Schreibfehler (dort stand einmal „ + “ statt „ = “) als falsch erkannt hat, bekommt natürlich die volle Punktzahl.
   (iii) Überprüfen Sie: Ist γ eine kreisförmige oder eine quadratische Kontur, so stimmt obige Zahl F (evtl. bis auf das Vorzeichen) mit der Fläche überein, die von γ umschlossen wird.