Übungsaufgaben
Algebra und Funktionentheorie, WS 2011/12

Serie 14 zum 7.2.12

1. Bestimmen Sie die Windungszahlen $w(\gamma, z_0)$ der nachfolgend angegebenen komplexen Kurven γ bezüglich des jeweils angegebenen Punktes z_0:

   (i) $\gamma(t) = 3e^{-it}$ mit $t \in [0, 2\pi]$ und $z_0 = 1$,

   (ii) γ wie zuvor und $z_0 = 3 - 4i$,

   (iii) $\gamma(t) = t(1-i) + i$ mit $t \in [0,1]$ und $z_0 = 1 + i$,

   (iv) γ wie zuvor und $z_0 = 2 - i$,

   (v) $\gamma(t) = t \cdot e^{it}$ mit $t \in [\pi, 7\pi]$ und $z_0 = 0$.

   Anmerkung: Die Bestimmung von Windungszahlen „mit dem Finger“ wird hier nicht als Lösung anerkannt.

2. Die Funktion $f(z) = \dfrac{1}{z^2 - 1}$ wird auf den folgenden Gebieten U_1, U_2 untersucht:
   $U_1 := \mathbb{C} \setminus \{1, -1\}$,
   $U_2 := \mathbb{C} \setminus (G_1 \cup G_2)$ mit $G_1 := \{r \in \mathbb{R} \,|\, r \geq 1\}$, $G_2 := \{r \in \mathbb{R} \,|\, r \leq -1\}$.

   (i) Ist U_2 einfach zusammenhängend?

   (ii) Ist U_2 sternförmig?

   (iii) Besitzt f eine Stammfunktion auf U_1?

   (iv) Besitzt f eine Stammfunktion auf U_2?

3. Gegeben sind Kurven κ_1, κ_2 und λ durch
   $\kappa_1(t) := e^{it}$, $\kappa_2(t) := 2e^{it}$ $(t \in [0, 2\pi])$,
   $\lambda(t) := 1 + t$ $(t \in [0,1])$.

   Mit γ_1 und γ_2 bezeichnen wir die folgenden Konturen:
   $\gamma_1 := \kappa_1 + \lambda - \kappa_2 - \lambda$
   $\gamma_2 := \kappa_1 + \lambda + \kappa_2 - \lambda$

   (i) Skizzieren Sie γ_1 und γ_2.

   (ii) Berechnen Sie $\int_{\gamma_1} f$ und $\int_{\gamma_2} f$ für $f(z) := \dfrac{1}{z} \cdot \cos(z)$.

   (iii) Interpretieren Sie Ihre Rechnung als Beweis für einen (sehr speziellen) Fall des Cauchyschen Integralsatzes.

4.* $U \subseteq \mathbb{C}$ sei ein Gebiet, $z_0 \in U$. Wir nennen zwei geschlossene Wege $\gamma_1, \gamma_2 : [a, b] \to U$ mit Anfangs- und Endpunkt z_0 *homotop*, wenn eine stetige Abbildung $\gamma : [a, b] \times [0, 1] \to U$ existiert, für die $\gamma(t, 0) = \gamma_0(t)$, $\gamma(t, 1) = \gamma_1(t)$ ist für $t \in [a, b]$ sowie $\gamma(a, s) = \gamma(b, s) = z_0$ für $s \in [0, 1]$.

   Wir sagen dann, γ_1 ist homotop zu γ_2 (geschrieben als $\gamma_1 \sim \gamma_2$).

(i) Zeigen Sie, dass $\sim$ eine Äquivqalenzrelation auf der Menge M der geschlossenen Wege in U ist.

(ii) Die Klasse von γ bezüglich obiger Relation $\sim$ bezeichnen wir mit $\overline{\gamma}$ und setzen $\pi(U, z_0) := M/\sim$. Weiter definieren wir das Produkt der Klassen von Wegen $\gamma_1,\ \gamma_2 \in M$ durch $\overline{\gamma_1} \cdot \overline{\gamma_2} := \overline{\gamma_1 + \gamma_2}$. Zeigen Sie, dass dies eine korrekte Definition ist und dadurch eine Gruppenoperation auf $\pi(U, z_0)$ definiert wird.

(iii) Beweisen Sie: Ist $z_1 \in U$ ein weiterer Punkt, so sind die Gruppen $\pi(U, z_0)$ und $\pi(U, z_1)$ isomorph.

(iv) Geben Sie jeweils den Isomorphietyp von $\pi(U, z_0)$ an, wenn z_0 Punkt eines der folgenden Gebiete ist: $U = \mathbb{C}$, $U = \mathbb{C} \setminus \{0\}$, bzw. $U = \mathbb{C} \setminus \{0, 1\}$.
Hinweis: Anstelle formaler Beweise werden unter (iv) Plausibilitätsbetrachtungen als ausreichend angesehen.