Übungsaufgaben
Algebra und Funktionentheorie, WS 2011/12

Serie 15 zum 13.2.12

Hinweis: Diese Serie wird nicht mehr korrigiert. Sofern Ihre Punktzahl für einen Übungsschein noch nicht ausreicht, können Sie Ihr Punktekonto damit auffüllen – vereinbaren Sie einen Konsultationstermin in der Zeit bis 13.2.12 und legen Sie dabei Ihre Lösungen vor.

1. Aufgabe 14.2, auf die bei der Serie 14 verzichtet wurde:
   Die Funktion $f(z) = \dfrac{1}{z^2 - 1}$ wird auf den folgenden Gebieten U_1, U_2 untersucht:
   $U_1 := \mathbb{C} \setminus \{1, -1\}$,
   $U_2 := \mathbb{C} \setminus (G_1 \cup G_2)$ mit $G_1 := \{r \in \mathbb{R} \mid r \geq 1\}$, $G_2 := \{r \in \mathbb{R} \mid r \leq -1\}$.
   (i) Ist U_2 einfach zusammenhängend?
   (ii) Ist U_2 sternförmig?
   (iii) Besitzt f eine Stammfunktion auf U_1?
   (iv) Besitzt f eine Stammfunktion auf U_2?

2. Bestimmen Sie die Taylorreihe von f in $z = 0$ und ihren Konvergenzradius:
   (i) $f(z) = \sin^2 z$
   (ii) $f(z) = \dfrac{1}{2z + 1}$

3. Bestimmen Sie die Laurentreihe von f in $z = 0$:
   (i) $f(z) = \dfrac{1}{z(z-1)}$
   (ii) $f(z) = \cos \dfrac{1}{z}$
   (iii) $f(z) = z^2 \cdot \exp(\dfrac{1}{z})$

4. Wir fixieren ein Gebiet $U \subseteq \mathbb{C}$ und eine differenzierbare Funktion $f : U \to \mathbb{C}$.
   Sei nun $z_0 \in U$ ein Punkt. Zu jeder geschlossenen Kontur γ mit Anfangs- und Endpunkt z_0 definieren wir die Zahl $I_\gamma(z_0) := \int_\gamma f$.
   (i) Zeigen Sie: $I(z_0) := \{I_\gamma(z_0) \mid \gamma \text{ Kontur von } z_0 \text{ nach } z_0\}$ ist eine abelsche Gruppe mit der Addition komplexer Zahlen.
   (ii) Hängt $I(z_0)$ von der Wahl von z_0 ab?
   (iii) Bestimmen Sie $I(z_0)$ im Fall $U = \mathbb{C} \setminus \{\pm 1\}$ und $f(z) = \dfrac{1}{z-1} + \dfrac{1}{z+1}$.