Beispiel-Beweise zur Klausurvorbereitung[1]
Lineare Algebra und analytische Geometrie II*

Es kommen u.a. Aufgaben aus der nachfolgenden Liste vor. Bitte beachten Sie, dass es noch weitere Beweis- und Rechenaufgaben zu den Themen des laufenden Semesters geben wird. Wichtige Rechenverfahren wurden in den Übungsaufgaben bereits behandelt und werden erwartet. Bitte nutzen Sie dei Übungen zur Diskussion.

1. A sei eine quadratische Matrix über $\mathbb{C}$. Beweisen Sie: Die Eigenwerte der Matrix A^2 sind genau die Quadrate der Eigenwerte von A.

2. $A \in \mathrm{M}(n;\mathbb{C})$ sei eine komplexe Matrix. Beweisen Sie:
   (1) Falls A den Rang r hat, so besitzt A höchstens r von 0 verschiedene Eigenwerte (die mit der jeweiligen algebraischen Multiplizität gezählt werden).
   (2) Ist $r = 1$, so gilt: Der einzige eventuell von 0 verschiedene Eigenwert der Matrix A ist die Spur $\mathrm{tr}(A)$.

3. $A = (a_{ij}) \in \mathrm{M}(n;K)$ sei eine obere Dreiecksmatrix. Zeigen Sie, dass $\{a_{11}, \ldots, a_{nn}\}$ die Menge der Eigenwerte von A ist.

4. $A \in \mathrm{M}(n;\mathbb{R})$ sei eine Matrix und $\lambda \geq 0$ Eigenwert der Matrix A^2. Beweisen Sie, dass dann eine der Zahlen $\sqrt{\lambda}$ oder $-\sqrt{\lambda}$ Eigenwert von A ist.

5. Beweisen Sie: Ist $\mathcal{B} = (\boldsymbol{v}_1, \ldots \boldsymbol{v}_n)$ eine Basis des Standardraumes K^n und sind die Vektoren $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n$ Eigenvektoren sowohl der Matrix $A \in \mathrm{M}(n;K)$ als auch der Matrix $B \in \mathrm{M}(n;K)$, dann gilt $A \cdot B = B \cdot A$.

6. Zeigen Sie: Für die Diagonalisierbarkeit einer oberen Dreiecksmatrix ist es hinreichend, dass die Diagonalelemente paarweise verschieden sind.

7. Geben Sie für beliebige $n \geq 2$ jeweils eine lineare Abbildung $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ und eine lineare Abbildung $\psi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ an, für die $\varphi \neq \psi$ gilt, deren charakteristische Polynome jedoch übereinstimmen.

8. Wir betrachten einen endlichdimensionalen Vektorraum V über den komplexen Zahlen und zwei lineare Endomorphismen φ und ψ von V. Beweisen Sie:
   (1) $\varphi \cdot \psi$ und $\psi \cdot \varphi$ besitzen einen gemeinsamen Eigenwert.
   (2) Ist $\varphi \cdot \psi = \psi \cdot \varphi$, so besitzen φ und ψ einen gemeinsamen Eigenvektor.

---

[1] Entnommen aus M. Roczen, H. Wolter, W. Pohl, D. Popescu, R. Laza: Lineare Algebra individuell Online-Version 0.62, http://www.math.hu-berlin.de/~roczen/la.htm

9. $A \in \mathrm{M}(n;K)$ sei eine Matrix über dem Körper K sowie f ein Polynom mit Koeffizienten aus K. Beweisen Sie: Wenn A diagonalisierbar ist, dann ist auch $f(A)$ diagonalisierbar.

10. Wir betrachten die reelle Matrix
$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.$$
Zeigen Sie:
    (1) Ist $(a-d)^2 + 4bc > 0$, so ist A diagonalisierbar.
    (2) Ist $(a-d)^2 + 4bc < 0$, so ist A nicht diagonalisierbar.
    (3) Für $(a-d)^2 + 4bc = 0$ existieren sowohl Matrizen A, die diagonalisierbar sind als auch solche, für die das nicht zutrifft.
    (4) Ist $(a-d)^2 + 4bc \neq 0$, so ist A halbeinfach.

11. Es sei $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{M}(2;\mathbb{R})$. Welche Bedingungen müssen a, b, c, d erfüllen, damit A nilpotent ist? Geben Sie in diesem Fall die jordansche Normalform an.

12. Es sei $A \in \mathrm{M}(7;\mathbb{C})$ und $A^4 = 0$; bestimmen Sie alle möglichen jordanschen Normalformen der Matrix A.

13. Klassifizieren Sie alle nilpotenten Matrizen $A \in \mathrm{M}(6;\mathbb{C})$ mit $\mathrm{rang}(A) = 3$ bis auf Ähnlichkeit.

14. Wir fixieren einen endlichdimensionalen komplexen Vektorraum V.
    (1) φ sei ein nilpotenter Endomorphismus von V sowie $(\boldsymbol{v}_{11}, \ldots, \boldsymbol{v}_{1q})$ eine Basis von $\ker(\varphi)$. Zu jedem der Vektoren $\boldsymbol{v}_{1j}$ wird für $i = 1, 2, \ldots$ eine Kette von Vektoren $\boldsymbol{v}_{ij}$ gewählt, für die $\varphi(\boldsymbol{v}_{i+1\,j}) = \boldsymbol{v}_{ij}$ ist (dies entspricht der Lösung eines linearen Gleichungssystems, wenn φ durch eine Matrix beschrieben wird).
    Zeigen Sie, dass $(\boldsymbol{v}_{1j}, \ldots, \boldsymbol{v}_{ij})$ ein linear unabhängiges System ist und das Verfahren nach endlich vielen Schritten abbricht.
    Überdies ist die Familie aller so aufgefundenen Vektoren $\boldsymbol{v}_{ij}$ linear unabhängig.
    (2) Wenn die unter (1) gefundene linear unabhängige Familie $(\boldsymbol{v}_{ij})_{i,j}$ aus $\dim(V)$ Vektoren besteht, d.h. eine Basis $\mathcal{B}$ von V bildet, so erhalten wir (bei geeigneter Anordnung der Vektoren) als zugehörige Matrix $\mathrm{M}_{\mathcal{B}}(\varphi)$ die jordansche Normalform.
    (3) Zeigen Sie, dass die jordansche Normalform eines nilpotenten Endomorphismus nicht immer so gefunden werden kann.
    (4) Erläutern Sie, wie sich aus dem Verfahren (1) im folgenden Spezialfall dennoch eine Methode ergibt, die jordansche Normalform eines Endomorphismus zu bestimmen: Das charakteristische Polynom zerfällt in (bekannte) Linearfaktoren, und sämtliche Eigenwerte haben die geometrische Multiplizität 1.

15. Bestimmen Sie alle möglichen jordanschen Normalformen von Matrizen mit den Eigenwerten $1, 2, 3$ und den (in entsprechender Reihenfolge auftretenden) algebraischen Vielfachheiten $1, 2$ bzw. 3 bis auf Permutation der Jordanblöcke.

16. Klassifizieren Sie alle Matrizen mit dem charakteristischen Polynom
$$\chi = X \cdot (X-1)^2 \cdot (X+1)^3$$
bis auf Ähnlichkeit.

17. Bestimmen Sie alle möglichen jordanschen Normalformen von Matrizen mit charakteristischem Polynom $\chi = X^3 \cdot (X-1)^5$ und Minimalpolynom $\mathrm{m} = X^2 \cdot (X-1)^2$.

18. Es seien V ein endlichdimensionaler komplexer Vektorraum und $\varphi \in \mathrm{End}_{\mathbb{C}}(V)$ ein Endomorphismus mit der Eigenschaft
$$\varphi(\varphi(\boldsymbol{x})) = 2\varphi(\boldsymbol{x}) - 3\boldsymbol{x} \quad \text{für alle} \quad \boldsymbol{x} \in V.$$
Geben Sie alle möglichen jordanschen Normalformen für φ an!

19. Es sei $A \in \mathrm{M}(n;\mathbb{C})$ eine invertierbare Matrix. Beweisen Sie, dass für jede Zahl $m \in \mathbb{Z}$ ein Polynom $f_m \in \mathbb{C}[X]$ existiert mit $\deg(f_m) \leq n-1$, so dass $A^m = f_m(A)$ ist.