

Schwerpunkte und Aufgaben zur euklidischen Geometrie

Zur Vorbereitung dieses Themas beachten Sie bitte:

- Die wichtigen Verfahren sollten Sie beherrschen: Orthonormierung nach E. Schmidt, Spektralzerlegung, Auffinden der Hauptachsenform von Quadriken, Untersuchung orthogomaler Abbildungen (Bewegungen) in kleinen Dimensionen
- Die Übungsaufgaben (bis einschl. Serie 13) sollten so verstanden sein, dass Sie entsprechende Probleme lösen können.
- Auf die nachfolgenden kleinen Beweisaufgaben sollten Sie sich vorbereiten, sie könnten in ähnlicher Gestalt als Klausuraufgaben vorkommen.

Aufgabe 6/2/030

V sei ein euklidischer Vektorraum. Beweisen Sie:

(1) Für eine Teilmenge $M \subseteq V$ ist $M^\perp$ stets Unterraum von V .

(2) Sind $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V$, so gilt

$$\|\mathbf{x}\|^2 + \|\mathbf{y}\|^2 = \|\mathbf{x} + \mathbf{y}\|^2 \iff \mathbf{x} \perp \mathbf{y}.$$

(3) Für Unterräume U und W von V gilt stets

(i) $U \subseteq W \Rightarrow U^\perp \supseteq W^\perp$,

(ii) $(U + W)^\perp = U^\perp \cap W^\perp$,

(iii) $(U \cap W)^\perp = U^\perp + W^\perp$.

Aufgabe 6/3/005

φ sei ein Endomorphismus des euklidischen Vektorraumes V und φ^* sein adjungierter Endomorphismus.

Beweisen Sie: $\ker(\varphi) = \ker(\varphi^* \cdot \varphi)$.

Aufgabe 6/3/006

φ sei ein Endomorphismus des euklidischen Vektorraumes V und φ^* sein adjungierter Endomorphismus.

Beweisen Sie: $\operatorname{im}(\varphi) = \operatorname{im}(\varphi \cdot \varphi^*)$.

Aufgabe 6/3/007

φ und ψ seien Endomorphismen des euklidischen Vektorraumes V und φ^* der zu φ adjungierte.

Beweisen Sie: Ist $\varphi^* \psi = 0$, so gilt $\operatorname{im}(\varphi) \perp \operatorname{im}(\psi)$.

Aufgabe 6/3/050

Wir betrachten die lineare Abbildung $\varphi : E \rightarrow E$ der euklidischen Ebene E , die bezüglich einer gegebenen Orthonormalbasis die folgende Matrix

$$\frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} -1 & -\sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & 1 \end{pmatrix}$$

besitzt.

- (1) Zeigen Sie: φ ist eine Spiegelung.
- (2) Geben Sie die Spiegelungsgerade G an (d.h. die Gerade, deren Punkte bei φ unverändert bleiben).

- (3) Bestimmen Sie den Winkel zwischen G und der ersten Koordinatenachse.

Aufgabe 6/3/060

Geben Sie die Eigenwerte von Drehungen und Spiegelungen der euklidischen Ebene an.

Aufgabe 6/3/080

Wir betrachten die euklidische Ebene E .

- (1) Zeigen Sie: Sind φ und ψ Spiegelungen von E , so ist $\varphi \cdot \psi$ eine Drehung oder die Identität.
- (2) Wir beziehen uns nun auf eine fest gewählte Orthonormalbasis und die durch sie gegebene Orientierung.
 φ sei die Spiegelung an der Geraden, die gegen die erste Koordinatenachse um den Winkel $\frac{\pi}{6}$ geneigt ist, ψ die Spiegelung an der Geraden, die gegen die erste Koordinatenachse um den Winkel $\frac{\pi}{3}$ geneigt ist.
 Welchen Drehwinkel hat $\varphi \cdot \psi$?

Aufgabe 6/3/090

Wir betrachten einen euklidischen Vektorraum V und eine orthogonale Transformation $\varphi : V \rightarrow V$.

Beweisen Sie: Falls U invariant bezüglich φ ist, so ist auch das orthogonale Komplement $U^\perp$ invariant bezüglich φ .

Aufgabe 6/3/100

V sei ein euklidischer Vektorraum.

- (1) Wir wählen zwei Vektoren $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V$ mit $\|\mathbf{x}\| = \|\mathbf{y}\|$. Beweisen Sie: Es existiert eine orthogonale Abbildung $\varphi : V \rightarrow V$ mit $\varphi(\mathbf{x}) = \mathbf{y}$.
- (2) Gegeben sind die Vektoren $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2 \in V$ mit $\|\mathbf{x}_1\| = \|\mathbf{y}_1\|$, $\|\mathbf{x}_2\| = \|\mathbf{y}_2\|$ und der Eigenschaft, dass der Winkel zwischen $\mathbf{x}_1$ und $\mathbf{x}_2$ mit dem Winkel zwischen $\mathbf{y}_1$ und $\mathbf{y}_2$ übereinstimmt. Beweisen Sie: Es existiert eine orthogonale Abbildung $\varphi : V \rightarrow V$ mit $\varphi(\mathbf{x}_1) = \mathbf{y}_1$, $\varphi(\mathbf{x}_2) = \mathbf{y}_2$.

Aufgabe 6/3/105

E sei eine euklidische Ebene, $\varphi : E \rightarrow E$ ein Endomorphismus, φ^* sein adjungierter Endomorphismus. Zeigen Sie:

- (1) Ist φ eine Drehung, so ist auch φ^* eine Drehung.
- (2) Ist φ eine Punktspiegelung, so ist auch φ^* Punktspiegelung.
- (3) Ist φ eine Geradenspiegelung, so ist auch φ^* eine Geradenspiegelung.

Treffen entsprechende Aussagen für einen dreidimensionalen euklidischen Raum zu?