Übungsaufgaben¹ Lineare Algebra und analytische Geometrie II*

Serie 1 zum 18.4.11

1. Berechnen Sie die Determinante der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ -4 & -3 & -1 & -2 \\ -4 & 6 & -3 & 4 \end{pmatrix}$$

unter Verwendung geeigneter Zeilentransformationen für A .

2. K sei ein Körper. Geben Sie jeweils einen Beweis oder ein Gegenbeispiel für die angegebenen Determinantenformeln.

(1) Sind $A, B \in M(n; K)$, so ist $|A + B| = |A| + |B|$.

(2) Ist $A \in M(n; K)$, $\alpha \in K$, so gilt $|\alpha A| = \alpha|A|$.

(3) Ist $A \in M(n; K)$, $\alpha \in K$, so gilt $|\alpha A| = \alpha^n|A|$.

3. Bestimmen Sie die Determinanten der folgenden komplexen Matrizen:

(1) $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ -2 & -1 & -2 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

(2) $B = \begin{pmatrix} i & 0 & i & i \\ 2 & 2i & 0 & 1 \\ 0 & i & 2i & 2i \\ 1 & -2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

4. Welcher der folgenden Endomorphismen $\mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ist ein Automorphismus?

(1) $f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 - 2x_2, -x_1 - 2x_3, x_1 + x_2 + 2x_3)$.

(2) $f_t(x_1, x_2, x_3) = (-2tx_3 - x_1 - x_2, -x_1 + 2x_2 + 3x_3, -x_1 - x_2)$
(für eine gegebene Zahl $t \in \mathbb{R}$).

- 5.* Wir untersuchen Abbildungen $V \times V \rightarrow K$ für K -Vektorräume V . Entscheiden Sie, in welchem Fall Bilinearität vorliegt.

(1) $f(x, y) := x \cdot {}^t y$ für den Standardvektorraum $V = K^n$,

(2) $g(A, B) := \text{tr}(A \cdot B)$ für den K -Vektorraum $V = M(n; K)$,

(3) $h(A, B) := \det(A \cdot B)$ für den K -Vektorraum $V = M(n; K)$.

¹ Ein * weist auf eine fakultative Aufgabe hin.

Lineare Algebra und analytische Geometrie II*
Lösungsblatt der Aufgabenserie 1 zum 18.4.11

1. **Lösung.** $a_{11} = 0$, daher wird – wie beim Gaußschen Algorithmus – zunächst die erste Zeile mit der zweiten vertauscht. Dabei ändert sich das Vorzeichen der Determinante, d.h.

$$-\det(A) = \det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \\ -4 & -3 & -1 & -2 \\ -4 & 6 & -3 & 4 \end{pmatrix}.$$

Nun können Vielfache der ersten Zeile von den folgenden subtrahiert werden, so dass die Einträge a_{i1} verschwinden. Wir erhalten eine neue Matrix mit derselben Determinante, und entsprechend wird mit der zweiten Zeile verfahren, d.h.

$$-\det(A) = \det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & -3 & 3 & 6 \\ 0 & 6 & 1 & 12 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 12 & 9 \\ 0 & 0 & -17 & 6 \end{pmatrix}.$$

Da wir ungern mit Brüchen rechnen, werden die 3. und 4. Zeile der zuletzt aufgetretenen Matrix mit -17 bzw. 12 multipliziert; entsprechend erhält die Determinante den Faktor $(-\frac{1}{17}) \cdot \frac{1}{12} = -\frac{1}{204}$. Es ergibt sich

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 12 & 9 \\ 0 & 0 & -17 & 6 \end{pmatrix} = -\frac{1}{204} \det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & -204 & -153 \\ 0 & 0 & -204 & 72 \end{pmatrix},$$

daher nach Subtraktion der dritten Zeile von der vierten

$$\begin{aligned} -\det(A) &= -\frac{1}{204} \det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & -204 & -153 \\ 0 & 0 & 0 & 225 \end{pmatrix} = \\ &= -\frac{1}{204} \cdot 1 \cdot 1 \cdot (-204) \cdot 225 = 225. \end{aligned}$$

Wir erhalten $\det(A) = -225$.

Das hier verwendete Verfahren zur Bestimmung der Determinante ist eine Variante des Gaußschen Algorithmus. Es ist allgemein ausführbar und beruht auf den folgenden Eigenschaften.

- (1) Bei Addition des Vielfachen einer Zeile zu einer anderen bleibt die Determinante einer Matrix unverändert.
- (2) Bei Multiplikation einer Zeile der Matrix A mit einer Zahl c wird $\det(A)$ in $c \cdot \det(A)$ überführt.
- (3) Durch Vertauschen zweier Zeilen der Matrix A wird $\det(A)$ in $-\det(A)$ überführt.
- (4) Die Determinante einer (z.B. oberen) Dreiecksmatrix ist das Produkt der Einträge ihrer Hauptdiagonale.

3. Lösung.

(1) Wir erhalten

$$\begin{aligned}\det(A) &= \begin{vmatrix} 2 & 0 & -1 \\ -2 & -1 & -2 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} 0 & 0 & -1 \\ -6 & -1 & -2 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix} \\ &= - \begin{vmatrix} -6 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 4.\end{aligned}$$

(2) Es ist $\det(B) = (-8i - 7)$.

4. Lösung.

(1) Die Matrix von f ist

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -1 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix},$$

sie hat die Determinante

$$\begin{aligned}& \begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -1 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & -2 & -2 \\ 1 & 3 & 2 \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} -2 & -2 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 2.\end{aligned}$$

Daher ist f ein Automorphismus.

(2) Die Matrix von f_t ist

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 & -2t \\ -1 & 2 & 3 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix},$$

für ihre Determinante ergibt sich

$$\begin{aligned}& \begin{vmatrix} -1 & -1 & -2t \\ -1 & 2 & 3 \\ -1 & -1 & 0 \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} -1 & -1 & -2t \\ -1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 2t \end{vmatrix} \\ &= 2t \cdot \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = -6t.\end{aligned}$$

Daher ist f_t genau dann ein Automorphismus, wenn $t \neq 0$.