Übungsaufgaben¹ Lineare Algebra und analytische Geometrie II*

Serie 2 zum 27.4.11

1.* K sei ein Körper. Für $a_1, \dots, a_n \in K$ setzen wir

$$[a_1, \dots, a_n] := \det \begin{pmatrix} a_1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdot & 0 \\ -1 & a_2 & 1 & 0 & 0 & 0 & \cdot & 0 \\ 0 & -1 & a_3 & 1 & 0 & 0 & \cdot & 0 \\ 0 & 0 & -1 & a_4 & 1 & 0 & \cdot & 0 \\ \cdot & \cdot \\ 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & -1 & a_n \end{pmatrix}.$$

Beweisen Sie:

$$(1) [a_1, \dots, a_n] = a_n \cdot [a_1, \dots, a_{n-1}] + [a_1, \dots, a_{n-2}]$$

$$(2) \frac{[a_1, \dots, a_n]}{[a_2, \dots, a_n]} = a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{a_3 + \dots + \frac{1}{a_n}}}$$

2. Bestimmen Sie den Rang der folgenden Matrix A in Abhängigkeit von den Parametern s, t .

$$A = \begin{pmatrix} -2t + 4s & 4t + 2s & 4t - 6s \\ -s & 2t + s & -t + 6s \\ t + 3s & 3s & -3t \end{pmatrix}$$

3. Beweisen Sie für die Adjungierte $\text{adj}(A)$ einer Matrix $A \in M(n; K)$:

$$(1) \det(\text{adj}(A)) = \det(A)^{n-1},$$

$$(2) \text{adj}(\text{adj}(A)) = \det(A)^{n-2} \cdot A \text{ für } n \geq 2.$$

4. Wir untersuchen Determinanten von Endomorphismen eines endlichdimensionalen K -Vektorraumes V .

(1) Es sei $V = \mathbb{R}^3$ und φ definiert durch

$$\varphi(x, y, z) := (-x + y + z, -y - z, x - z).$$

Bestimmen Sie $\det(\varphi)$.

(2) U und W seien Unterräume ($\neq \mathbf{0}$), für die $V = U \oplus W$ gilt. Durch die folgenden Vorschriften sind auf eindeutige Weise lineare Endomorphismen von V definiert.

$$\psi_1(\mathbf{x} + \mathbf{y}) := \mathbf{x}, \quad \mathbf{x} \in U, \mathbf{y} \in W$$

$$\psi_2(\mathbf{x} + \mathbf{y}) := 3\mathbf{x} - 2\mathbf{y}, \quad \mathbf{x} \in U, \mathbf{y} \in W$$

Bestimmen Sie die Determinanten von ψ_1 und ψ_2 .

¹ Ein * weist auf eine fakultative Aufgabe hin.

- (3) Zeigen Sie, dass für jede Zahl $\alpha \in K$ ein Endomorphismus des Vektorraumes $V \neq \mathbf{0}$ existiert, dessen Determinante α ist.
5. $\varphi : V \rightarrow V$ sei Endomorphismus des K -Vektorraumes V und $k \geq 1$ eine natürliche Zahl. Zeigen Sie:
- (1) Ist $\lambda \in K$ Eigenwert von φ , so ist λ^k ein Eigenwert des Endomorphismus φ^k .
 - (2) Ist $\mathbf{x} \in V$ Eigenvektor von φ zum Eigenwert λ , so ist $\mathbf{x}$ auch Eigenvektor von φ^k zum Eigenwert λ^k .

Lineare Algebra und analytische Geometrie II*
Lösungsblatt der Aufgabenserie 2 zum 27.4.11

2. **Lösung.** Eine prinzipielle Möglichkeit zur Behandlung solcher Aufgaben ist durch das Determinantenkriterium gegeben; dazu sind die Nullstellen aller Determinanten quadratischer Teilmatrizen zu untersuchen. Wir gehen hier anders vor, dabei werden die folgenden Fälle unterschieden.

(1) $s = t = 0$, dann ist $A = 0$ und folglich $\text{rang}(A) = 0$.

(2) $s = 0$ und $t \neq 0$; dann ergibt sich

$$A = \begin{pmatrix} -2t & 4t & 4t \\ 0 & 2t & -t \\ t & 0 & -3t \end{pmatrix}.$$

Wegen $t \neq 0$ ist $\text{rang}(A) = \text{rang}\left(\frac{1}{t} \cdot A\right)$,

$$\frac{1}{t} \cdot A = \begin{pmatrix} -2 & 4 & 4 \\ 0 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & -3 \end{pmatrix},$$

also $\text{rang}(A) = 2$.

(3) $s \neq 0$, so ist $\text{rang}(A) = \text{rang}\left(\frac{1}{s} \cdot A\right)$. Setzen wir $u = \frac{t}{s}$, so ist

$$\frac{1}{s} \cdot A = \begin{pmatrix} -2u + 4 & 4u + 2 & 4u - 6 \\ -1 & 2u + 1 & -u + 6 \\ u + 3 & 3 & -3u \end{pmatrix}.$$

Wir berechnen die Determinante

$$\begin{vmatrix} -2u + 4 & 4u + 2 & 4u - 6 \\ -1 & 2u + 1 & -u + 6 \\ u + 3 & 3 & -3u \end{vmatrix} = -42u^2 + 126u$$

und erhalten für $u \neq 0, 3$ (i.e. $t \neq 0, 3s$) einen von 0 verschiedenen Wert, also $\text{rang}(A) = 3$. Für $u = 0$ ist

$$\frac{1}{s} \cdot A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & -6 \\ -1 & 1 & 6 \\ 3 & 3 & 0 \end{pmatrix},$$

also $\text{rang}(A) = 2$. Für $u = 3$ ist

$$\frac{1}{s} \cdot A = \begin{pmatrix} -2 & 14 & 6 \\ -1 & 7 & 3 \\ 6 & 3 & -9 \end{pmatrix},$$

folglich $\text{rang}(A) = 2$.

4. **Lösung.** Wir führen die Rechnungen zu (1) und (2) aus.

(1) Die Matrix des Endomorphismus bezüglich der Standardbasis $\mathcal{B}$ ist

$$M_{\mathcal{B}}(\varphi) = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Daher folgt

$$\begin{aligned}\det(\varphi) &= \det(M_{\mathcal{B}}(\varphi)) = \begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix} \\ &= - \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -1.\end{aligned}$$

- (2) Es sei $r = \dim(U)$ und $s = \dim(W)$. Wir wählen Basen $\mathcal{B}_U = \{\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_r\}$ in U und $\mathcal{B}_W = \{\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_s\}$ in W , dann ist $\mathcal{B} = \{\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_r, \mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_s\}$ eine Basis in V . Bezüglich $\mathcal{B}$ haben ψ_1 bzw. ψ_2 die Matrizen

$$M_{\mathcal{B}}(\psi_1) = \begin{pmatrix} 1 & & 0 & 0 & \dots & 0 \\ & \ddots & & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

und

$$M_{\mathcal{B}}(\psi_2) = \begin{pmatrix} 3 & & 0 & 0 & \dots & 0 \\ & \ddots & & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & & 3 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & -2 & & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & & -2 \end{pmatrix}$$

Folglich ist $\det(\psi_1) = 0$ und $\det(\psi_2) = 3^r \cdot (-2)^s$.