Übungsaufgaben[1] Lineare Algebra und analytische Geometrie I*

Serie 3 zum 2.5.11

1. Bestimmen Sie das charakteristische Polynom der Matrix
$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 6 & 4 & 3 & -6 & 7 \end{pmatrix}.$$

2. Bestimmen Sie für folgende Matrizen die Eigenwerte und zugehörigen Eigenräume (jeweils durch Angabe einer Basis).

(1) $$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathrm{M}(3;\mathbb{R})$$

(2) $$\begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{3} \\ \sqrt{3} & -1 \end{pmatrix} \in \mathrm{M}(2;\mathbb{C})$$

(3) $$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathrm{M}(3;\mathbb{F}_2)$$

3.* Es sei $A \in \mathrm{M}(n;\mathbb{R})$ eine symmetrische Matrix (d.h. $A = {}^{t}A$). Wir betrachten sie als Element von $\mathrm{M}(n;\mathbb{C})$. Beweisen Sie, dass alle Eigenwerte von A reell sind.

4. $A \in \mathrm{M}(n;\mathbb{C})$ sei eine komplexe Matrix. Beweisen Sie:

(1) Falls A den Rang r hat, so besitzt A höchstens r von 0 verschiedene Eigenwerte (die mit der jeweiligen algebraischen Multiplizität gezählt werden).

(2) Ist $r = 1$, so gilt: Der einzige eventuell von 0 verschiedene Eigenwert der Matrix A ist die Spur $\mathrm{tr}(A)$.

---

[1] Ein * weist auf eine fakultative Aufgabe hin.
Entnommen aus M. Roczen, H. Wolter, W. Pohl, D. Popescu, R. Laza: Lineare Algebra individuell Online-Version 0.62, http://www.math.hu-berlin.de/~roczen/la.htm

Lineare Algebra und analytische Geometrie I*
Lösungsblatt der Aufgabenserie 3 zum 2.5.11

1. **Lösung.** Das charakteristische Polynom χ_A ist gleich der Determinante

$$\det(X\cdot \mathrm{E}_5 - A) \in \mathbb{R}[X].$$

Die Determinante der charakteristischen Matrix $B = X\cdot\mathrm{E}_5 - A$ wird nach der letzten Zeile mit den Adjunkten B'_{5i} $(i = 1, ..., 5)$ entwickelt, das sind die folgenden Matrizen:

$$B'_{51} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ X & -1 & 0 & 0 \\ 0 & X & -1 & 0 \\ 0 & 0 & X & -1 \end{pmatrix}, \quad B'_{52} = \begin{pmatrix} X & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & X & -1 & 0 \\ 0 & 0 & X & -1 \end{pmatrix}$$

$$B'_{53} = \begin{pmatrix} X & -1 & 0 & 0 \\ 0 & X & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & X & -1 \end{pmatrix}, \quad B'_{54} = \begin{pmatrix} X & -1 & 0 & 0 \\ 0 & X & -1 & 0 \\ 0 & 0 & X & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$B'_{55} = \begin{pmatrix} X & -1 & 0 & 0 \\ 0 & X & -1 & 0 \\ 0 & 0 & X & -1 \\ 0 & 0 & 0 & X \end{pmatrix}$$

Die Adjunkten sind entweder obere oder untere Dreiecksmatrizen oder aus solchen blockdiagonal zusammengesetzt. Mit den Diagonalelementen $b^{(i)}_{kk}$ der Adjunkten gilt daher

$$\det(B'_{5i}) = \prod_{k=1}^{4} b^{(i)}_{kk}.$$

Es folgt

$$\chi_A = X^5 - 7X^4 + 6X^3 - 3X^2 - 4X - 6.$$