

## Übungsaufgaben<sup>1</sup> Lineare Algebra und analytische Geometrie II\*

### Serie 4 zum 9.5.11

- 1.\*  $A \in M(n; \mathbb{R})$  sei eine Matrix und  $\lambda \geq 0$  Eigenwert der Matrix  $A^2$ . Beweisen Sie, dass dann eine der Zahlen  $\sqrt{\lambda}$  oder  $-\sqrt{\lambda}$  Eigenwert von  $A$  ist.
2. Beweisen Sie: Ist  $\mathcal{B} = (\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n)$  eine Basis des Standardraumes  $K^n$  und sind die Vektoren  $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n$  Eigenvektoren sowohl der Matrix  $A \in M(n; K)$  als auch der Matrix  $B \in M(n; K)$ , dann gilt  $A \cdot B = B \cdot A$ .

3. Zeigen Sie, dass die reelle Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 11 & 14 & 0 \\ -7 & -10 & 0 \\ 14 & 14 & -3 \end{pmatrix}$$

diagonalisierbar ist und geben Sie eine Diagonalmatrix  $D$  sowie eine reguläre Matrix  $U$  mit der Eigenschaft  $D = U^{-1} \cdot A \cdot U$  an.

4. Entscheiden Sie, welche der folgenden drei Matrizen  $A^{(i)}$  über dem Körper  $\mathbb{R}$  diagonalisierbar ist:

$$A^{(1)} = \begin{pmatrix} -5 & -1 & 5 \\ 0 & -3 & 2 \\ -4 & -2 & 5 \end{pmatrix}, \quad A^{(2)} = \begin{pmatrix} 5 & 2 & -5 \\ 4 & -1 & 1 \\ 4 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad A^{(3)} = \begin{pmatrix} 3 & 3 & -4 \\ 0 & 1 & -3 \\ 2 & 3 & -5 \end{pmatrix}.$$

**Hinweis.** Jede der Matrizen hat die Zahl 1 als Eigenwert.

5. Untersuchen Sie, ob die folgende Matrix  $A \in M(4; \mathbb{F}_2)$  halbeinfach ist.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

---

<sup>1</sup> Ein \* weist auf eine fakultative Aufgabe hin.

**Lineare Algebra und analytische Geometrie II\***  
**Lösungsblatt der Aufgabenserie 4 zum 9.5.11**

3. **Lösung.** Zunächst wird das charakteristische Polynom der gegebenen Matrix bestimmt.  $\chi_A = \det(X \cdot E_3 - A)$  ist z.B. durch Entwicklung nach der letzten Spalte zu ermitteln.

$$\begin{aligned}\chi_A &= \det \begin{pmatrix} X-11 & -14 & 0 \\ 7 & X+10 & 0 \\ -14 & -14 & X+3 \end{pmatrix} \\ &= \det \begin{pmatrix} X-11 & -14 \\ 7 & X+10 \end{pmatrix} \cdot (X+3) \\ &= (X-4) \cdot (X+3)^2\end{aligned}$$

Nullstellen sind die Eigenwerte 4 und  $-3$  der Matrix  $A$ .

Zur Bestimmung des Eigenraumes zum Eigenwert  $\lambda = 4$  haben wir das homogene lineare Gleichungssystem mit der Koeffizientenmatrix  $\lambda \cdot E_3 - A$ , d.h. das System

$$\begin{aligned}-7x_1 - 14x_2 &= 0 \\ 7x_1 + 14x_2 &= 0 \\ -14x_1 - 14x_2 + 7x_3 &= 0\end{aligned}$$

zu lösen. Eine Basis seines eindimensionalen Lösungsraumes ist der Vektor  $\mathbf{v}_1 = (2, -1, 2)$ . (Es genügt hier, einen von Null verschiedenen Lösungsvektor zu erraten, da  $\dim(V_4) = 1$  von vornherein klar ist.)

Entsprechend ergibt sich zum Eigenwert  $\lambda = -3$  das lineare Gleichungssystem

$$\begin{aligned}-14x_1 - 14x_2 &= 0 \\ 7x_1 + 7x_2 &= 0 \\ -14x_1 - 14x_2 &= 0\end{aligned}$$

für den Eigenraum  $V_{-3}$ ; mit dem gaußschen Algorithmus finden wir eine Basis  $(\mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3) = ((1, -1, 0), (0, 0, 1))$ . Folglich hat der Eigenwert  $\lambda = -3$  die geometrische Multiplizität 2. Da für beide Eigenwerte algebraische und geometrische Multiplizität übereinstimmen, ist  $A$  diagonalisierbar. Mit der Übergangsmatrix

$$U = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

von  $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3)$  zur kanonischen Basis erhalten wir ohne weitere Rechnung die Diagonalmatrix

$$D = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} = U^{-1} \cdot A \cdot U$$

in der Ähnlichkeitsklasse von  $A$ .

**Anmerkung.** Geschicktes Rechnen kann den Aufwand beträchtlich verringern. So ist es beispielsweise nach der Bestimmung von  $\chi_A$  schon klar, dass der Eigenraum  $V_{-3}$  nur die Dimension 1 oder 2 haben kann.  $\mathbf{e}_3 = (0, 0, 1)$  ist offensichtlich ein Eigenvektor

der gegebenen Matrix  $A$ . Lässt sich ein weiterer Eigenvektor zum Eigenwert  $\lambda = -3$  erraten, der kein Vielfaches von  $\mathbf{e}_3$  ist, so ist damit bereits eine Basis für  $V_{-3}$  gefunden. Im vorliegenden Beispiel wäre dies mit  $\mathbf{v}_2 = (1, -1, 0)$  nicht besonders schwierig gewesen.

4. **Lösung.** Um eine Matrix auf Diagonalisierbarkeit zu untersuchen, werden zunächst ihre Eigenwerte, also die Nullstellen des charakteristischen Polynoms bestimmt.

In unserem Falle sind zunächst die drei charakteristischen Polynome  $\chi_{A^{(i)}}$  aus  $\mathbb{R}[X]$  für  $i = 1, 2, 3$  zu berechnen, d.h. die Determinanten der charakteristischen Matrizen  $B^{(i)} = X \cdot E_3 - A^{(i)}$ . Es gilt

$$\chi_{A^{(i)}} = \det(B^{(i)}).$$

Die leibnizsche Formel (vgl. 4/2/6) führt im Falle der Dimension 3 auf die sarrussche Regel

$$\begin{aligned} \chi_{A^{(i)}} = & b_{11}^{(i)}b_{22}^{(i)}b_{33}^{(i)} + b_{12}^{(i)}b_{23}^{(i)}b_{31}^{(i)} + b_{13}^{(i)}b_{21}^{(i)}b_{32}^{(i)} \\ & - b_{13}^{(i)}b_{22}^{(i)}b_{31}^{(i)} - b_{12}^{(i)}b_{21}^{(i)}b_{33}^{(i)} - b_{11}^{(i)}b_{23}^{(i)}b_{32}^{(i)}. \end{aligned}$$

Für  $i = 1$  ist

$$B^{(1)} = \begin{pmatrix} X+5 & 1 & -5 \\ 0 & X+3 & -2 \\ 4 & 2 & X-5 \end{pmatrix}.$$

Die angegebenen Produkte in der sarrusschen Regel sind

$$\begin{aligned} b_{11}^{(1)}b_{22}^{(1)}b_{33}^{(1)} &= X^3 + 3X^2 - 25X - 75, \quad b_{12}^{(1)}b_{23}^{(1)}b_{31}^{(1)} = -8, \quad b_{13}^{(1)}b_{21}^{(1)}b_{32}^{(1)} = 0, \\ b_{13}^{(1)}b_{22}^{(1)}b_{31}^{(1)} &= -20X - 60, \quad b_{12}^{(1)}b_{21}^{(1)}b_{33}^{(1)} = 0, \quad b_{11}^{(1)}b_{23}^{(1)}b_{32}^{(1)} = -4X - 20. \end{aligned}$$

Es folgt

$$\chi_{A^{(1)}} = X^3 + 3X^2 - X - 3.$$

Analog ergeben sich

$$\chi_{A^{(2)}} = X^3 - 3X^2 + 3X - 1,$$

$$\chi_{A^{(3)}} = X^3 + X^2 - 2.$$

Nach dem Hinweis zur Aufgabe müssen die charakteristischen Polynome durch  $X - 1$  teilbar sein, daher sind nur noch die Nullstellen der quadratischen Polynome  $\psi_{A^{(i)}} = \chi_{A^{(i)}} / (X - 1)$  zu untersuchen. Die Division ergibt

$$\psi_{A^{(1)}} = X^2 + 4X + 3,$$

$$\psi_{A^{(2)}} = X^2 - 2X + 1,$$

$$\psi_{A^{(3)}} = X^2 + 2X + 2.$$

Das Polynom  $\psi_{A^{(1)}}$  besitzt zwei verschiedene reelle Nullstellen ungleich 1, das Polynom  $\psi_{A^{(2)}}$  eine Doppelnulstelle mit dem Wert 1 und das Polynom  $\psi_{A^{(3)}}$  keine reellen Nullstellen. Die Frage nach der Diagonalisierbarkeit lässt sich nun beantworten:

Nur die Matrix  $A^{(1)}$  ist diagonalisierbar.

**Begründung.** Alle komplexen Eigenwerte der Matrix  $A^{(1)}$  sind reell und haben die algebraische Vielfachheit 1.

Die übrigen können folgendermaßen ausgeschlossen werden: Aus der Diagonalisierbarkeit folgt, dass das charakteristische Polynom über  $\mathbb{R}$  in ein Produkt von Linearfaktoren zerfällt – dies ist nicht der Fall, wenn ein Paar konjugiert komplexer Nullstellen auftritt.

Ist eine Matrix mit einem einzigen Eigenwert diagonalisierbar, so ist sie bereits selbst eine Diagonalmatrix – dies ist jedoch hier nicht der Fall.

5. **Lösung.** Wir berechnen zunächst das charakteristische Polynom  $f = \chi_A(X) \in \mathbb{F}_2[X]$  und erhalten

$$\begin{aligned} f &= \det \begin{pmatrix} X & 1 & 1 & 0 \\ 0 & X+1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & X+1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & X+1 \end{pmatrix} \\ &= X^4 + X^3 + X^2 + X + 1. \end{aligned}$$

Um festzustellen, ob  $f$  mehrfache Nullstellen besitzt, wird der größte gemeinsame Teiler von  $f$  und der Ableitung  $f'$  bestimmt. Es ergibt sich  $f' = X^2 + 1$ .

Offensichtlich ist  $f' = (X+1)^2$ , daher existiert wegen  $f(1) \neq 0$  kein gemeinsamer irreduzibler Faktor mit  $f$ . Aus  $\text{ggT}(f, f') = 1$  folgt, dass  $f$  keine mehrfachen Nullstellen in den Erweiterungskörpern von  $\mathbb{F}_2$  besitzt. In einem Zerfällungskörper des Polynoms  $f$  hat die Matrix  $A$  daher 4 verschiedene Eigenwerte, ist also halbeinfach.