

Übungsaufgaben¹ Lineare Algebra und analytische Geometrie II*

Serie 5 zum 16.5.11

1. Für welche $t \in \mathbb{R}$ ist die Matrix

$$A_t = \begin{pmatrix} t+1 & -t+2 & 0 \\ -t+2 & t+1 & 0 \\ -\frac{1}{2}t+2 & -\frac{1}{2}t+1 & t \end{pmatrix} \in M(3; \mathbb{R})$$

über dem Körper $\mathbb{C}$ diagonalisierbar?

2. V sei der Unterraum des $\mathbb{R}$ -Vektorraumes aller Abbildungen von $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$, der von den Abbildungen $1, \sin(x), \cos(x)$ erzeugt wird.

(1) Zeigen Sie: $\dim_{\mathbb{R}}(V) = 3$.

(2) Es sei $\varphi : V \rightarrow V$ der lineare Endomorphismus $f \mapsto \frac{d}{dx}(f)$ von V , der durch die Ableitung definiert wird. Ist φ diagonalisierbar?

- 3.* Wir betrachten die reelle Matrix

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.$$

Zeigen Sie:

(1) Ist $(a-d)^2 + 4bc > 0$, so ist A diagonalisierbar.

(2) Ist $(a-d)^2 + 4bc < 0$, so ist A nicht diagonalisierbar.

(3) Für $(a-d)^2 + 4bc = 0$ existieren sowohl Matrizen A , die diagonalisierbar sind als auch solche, für die das nicht zutrifft.

(4) Ist $(a-d)^2 + 4bc \neq 0$, so ist A halbeinfach.

4. Überprüfen Sie, dass die folgende Matrix

$$A = \begin{pmatrix} -3 & -4 & 1 & 4 \\ 0 & -2 & 2 & -1 \\ -1 & -4 & 3 & 0 \\ -2 & -4 & 2 & 2 \end{pmatrix} \in M(4; \mathbb{R})$$

nilpotent ist und geben Sie ihre Normalform B , sowie eine reguläre Matrix U an, für die $B = U^{-1} \cdot A \cdot U$ ist.

5. Klassifizieren Sie alle nilpotenten Matrizen $A \in M(6; \mathbb{C})$ mit $\text{rang}(A) = 3$ bis auf Ähnlichkeit.

¹ Ein * weist auf eine fakultative Aufgabe hin.

Lineare Algebra und analytische Geometrie II*
Lösungsblatt der Aufgabenserie 5 zum 16.5.11

4. **Lösung.** Offensichtlich ist

$$A \neq 0, \quad A^2 = 0, \quad \text{rang}(A) = 2,$$

daher muss A die Normalform haben, die der Partition $(2, 2)$ von 4 entspricht.

Zur Bestimmung der zyklischen Vektoren berechnen wir zunächst den Kern $K = \ker(\varphi)$ der zugehörigen linearen Abbildung, der durch die Lösungsmenge des homogenen linearen Gleichungssystems mit der Koeffizientenmatrix A gegeben ist. $((4, -1, 0, 2), (-1, 1, 1, 0))$ ist eine Basis von K ; diese wird durch die Vektoren $\mathbf{w}_{11} = (1, 0, 0, 0)$, $\mathbf{w}_{12} = (0, 1, 0, 0)$ der kanonischen Basis zu einer Basis von V ergänzt.

Zusammen mit $\mathbf{w}_{21} = \varphi(\mathbf{w}_{11}) = (-3, 0, -1, -2)$ und $\mathbf{w}_{22} = \varphi(\mathbf{w}_{12}) = (-4, -2, -4, -4)$ entsteht eine Basis $\mathcal{B} = (\mathbf{w}_{11}, \mathbf{w}_{21}, \mathbf{w}_{12}, \mathbf{w}_{22})$ von V , bezüglich der $M_{\mathcal{B}}(\varphi)$ die gesuchte Normalform B annimmt. Werden die Vektoren aus $\mathcal{B}$ als Spalten einer Matrix

$$U = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & -1 & 0 & -4 \\ 0 & -2 & 0 & -4 \end{pmatrix}$$

angeordnet, so erhalten wir durch

$$B = U^{-1} \cdot A \cdot U = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

die Normalform von A .