Übungsaufgaben¹ Lineare Algebra und analytische Geometrie II*

Serie 6 zum 23.5.11

1. Wir betrachten einen endlichdimensionalen Vektorraum V über den komplexen Zahlen und zwei lineare Endomorphismen φ und ψ von V . Beweisen Sie:

- (1) $\varphi \cdot \psi$ und $\psi \cdot \varphi$ besitzen einen gemeinsamen Eigenwert.
- (2) Ist $\varphi \cdot \psi = \psi \cdot \varphi$, so besitzen φ und ψ einen gemeinsamen Eigenvektor.

2. Es sei $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M(2; \mathbb{R})$. Welche Bedingungen müssen a, b, c, d erfüllen, damit A nilpotent ist? Geben Sie in diesem Fall die jordanische Normalform an.

3.* Wir fixieren einen endlichdimensionalen komplexen Vektorraum V .

- (1) φ sei ein nilpotenter Endomorphismus von V sowie $(\mathbf{v}_{11}, \dots, \mathbf{v}_{1q})$ eine Basis von $\ker(\varphi)$. Zu jedem der Vektoren $\mathbf{v}_{1j}$ wird für $i = 1, 2, \dots$ eine Kette von Vektoren $\mathbf{v}_{ij}$ gewählt, für die $\varphi(\mathbf{v}_{i+1j}) = \mathbf{v}_{ij}$ ist (dies entspricht der Lösung eines linearen Gleichungssystems, wenn φ durch eine Matrix beschrieben wird).

Zeigen Sie, dass $(\mathbf{v}_{1j}, \dots, \mathbf{v}_{ij})$ ein linear unabhängiges System ist und das Verfahren nach endlich vielen Schritten abbricht.

Überdies ist die Familie aller so aufgefundenen Vektoren $\mathbf{v}_{ij}$ linear unabhängig.

- (2) Wenn die unter (1) gefundene linear unabhängige Familie $(\mathbf{v}_{ij})_{i,j}$ aus $\dim(V)$ Vektoren besteht, d.h. eine Basis $\mathcal{B}$ von V bildet, so erhalten wir (bei geeigneter Anordnung der Vektoren) als zugehörige Matrix $M_{\mathcal{B}}(\varphi)$ die jordanische Normalform.
- (3) Zeigen Sie, dass die jordanische Normalform eines nilpotenten Endomorphismus nicht immer so gefunden werden kann.
- (4) Erläutern Sie, wie sich aus dem Verfahren (1) im folgenden Spezialfall dennoch eine Methode ergibt, die jordanische Normalform eines Endomorphismus zu bestimmen: Das charakteristische Polynom zerfällt in (bekannte) Linearfaktoren, und sämtliche Eigenwerte haben die geometrische Multiplizität 1.

4. Bestimmen Sie die jordanische Normalform J der reellen Matrix

$$A = \begin{pmatrix} -5 & 3 & 2 & 0 \\ -6 & 4 & 2 & -1 \\ -2 & 1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

sowie eine Matrix $U \in GL(4; \mathbb{R})$ für die $U^{-1} \cdot A \cdot U = J$ ist.

Anmerkung. Das charakteristische Polynom ist ein Quadrat, seine Nullstellen sind reell.

¹ Ein * weist auf eine fakultative Aufgabe hin.

5. Gegeben ist die folgende Matrix

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 11 & 4 & -1 \\ -1 & 4 & 1 & -1 \\ 1 & -3 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

- (1) Bestimmen Sie das Minimalpolynom m_A von A , indem Sie untersuchen, ob kleine Potenzen der Matrix linear abhängig sind.
- (2) Ist A halbeinfach?

Lineare Algebra und analytische Geometrie II*
Lösungsblatt der Aufgabenserie 6 zum 23.5.11

4. **Lösung.** Den (bezüglich der Standardbasis) zu A gehörigen Endomorphismus des Standardraumes $\mathbb{R}^4$ bezeichnen wir mit φ .

Als Nullstellen des charakteristischen Polynoms

$$\chi_A = \det(X \cdot E_4 - A) = X^4 - 2X^2 + 1 = (X^2 - 1)^2$$

erhalten wir die (sämtlich reellen) Eigenwerte $\lambda_1 = -1$ und $\lambda_2 = 1$ der Matrix A , die beide die algebraische Multiplizität 2 haben. Zur Bestimmung einer zyklischen Basis des Hauptraumes $H_1 := H(\varphi, \lambda_1)$ lösen wir das lineare Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} -4 & 3 & 2 & 0 \\ -6 & 5 & 2 & -1 \\ -2 & 1 & 3 & 2 \\ 2 & -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

das den Unterraum $\ker(\varphi - \lambda_1 \cdot \text{id}) \subseteq H_1$ beschreibt. Er ist eindimensional und wird von dem Vektor

$$\mathbf{v}_2 = (-2, 0, -4, 4)$$

erzeugt, d.h. $\mathbf{v}_2$ ist ein Eigenvektor von A bezüglich λ_1 . Nun muss wegen $\dim(H_1) = 2$ jeder Urbildvektor $\mathbf{v}_1 \in (\varphi - \lambda_1 \cdot \text{id})^{-1}(\mathbf{v}_2)$ zusammen mit $\mathbf{v}_2$ eine Kette $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2)$ zyklischer Vektoren für H_1 bilden (Beweis?). Wir finden

$$\mathbf{v}_1 = (5, 6, 0, 0)$$

als Lösung von

$$\begin{pmatrix} -4 & 3 & 2 & 0 \\ -6 & 5 & 2 & -1 \\ -2 & 1 & 3 & 2 \\ 2 & -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ -4 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Entsprechend ergeben sich zyklische Vektoren

$$\mathbf{v}_3 = (3, 0, 10, -2)$$

$$\mathbf{v}_4 = (2, 4, 0, 0)$$

für $H(\varphi, \lambda_2)$ als Lösungen der Gleichungssysteme $(A - \lambda_2 \cdot E_4) \cdot \mathbf{v}_4 = 0$ ($\mathbf{v}_4 \neq \mathbf{0}$) und $(A - \lambda_2 \cdot E_4) \cdot \mathbf{v}_3 = \mathbf{v}_4$. Mit der Übergangsmatrix

$$U = \begin{pmatrix} 5 & -2 & 3 & 2 \\ 6 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & -4 & 10 & 0 \\ 0 & 4 & -2 & 0 \end{pmatrix},$$

deren Spalten durch die Vektoren $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$ und $\mathbf{v}_4$ gebildet werden, erhalten wir

$$J = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

mit $U^{-1} \cdot A \cdot U = J$ als jordanische Normalform der Matrix A .

5. **Lösung.** Offensichtlich ist m_A nicht linear (A ist keine Diagonalmatrix).

Nun testen wir, ob m_A quadratisch ist; dann muss A^2 plus ein (geeignetes) Vielfaches $u \cdot A$ von A diagonal sein. $A^2 + u \cdot A = v \cdot E_4$ entspricht einem einfach auszuwertenden System linearer Gleichungen für u und v ; wir schreiben einzelne davon auf und testen durch Einsetzen, ob die Bedingung erfüllt ist. Leicht zeigt sich, dass dies für $u = -1$ der Fall ist, dann ist weiter $v = -1$.

Wir haben so ein nichtkonstantes Polynom $f = X^2 - X + 1 \in \mathbb{R}[X]$ minimalen Grades mit $f(A) = 0$ gefunden. Da f normiert ist, folgt $f = m_A$; dies ist die Antwort auf Frage (1).

Leicht ist zu sehen, dass m_A keine mehrfache Nullstelle in $\mathbb{C}$ besitzt, daher ist A eine halbeinfache Matrix.