Übungsaufgaben[1] Lineare Algebra und analytische Geometrie II*

Serie 7 zum 30.5.11

1. Zeigen Sie: Sind V, W und P Vektorräume, so existieren Isomorphismen (1) bzw. (2), die durch die angegebenen Bedingungen eindeutig bestimmt sind.
   (1) $V \otimes_K W \cong W \otimes_K V, \quad \boldsymbol{v} \otimes \boldsymbol{w} \mapsto \boldsymbol{w} \otimes \boldsymbol{v}$
   (2) $(V \otimes_K W) \otimes_K P \cong V \otimes_K (W \otimes_K P), \quad (\boldsymbol{v} \otimes \boldsymbol{w}) \otimes \boldsymbol{p} \mapsto \boldsymbol{v} \otimes (\boldsymbol{w} \otimes \boldsymbol{p})$

2. Bestimmen Sie alle möglichen jordanschen Normalformen von Matrizen mit charakteristischem Polynom $\chi = X^3 \cdot (X-1)^5$ und Minimalpolynom $\mathrm{m} = X^2 \cdot (X-1)^2$.

3. Es seien V ein endlichdimensionaler komplexer Vektorraum und $\varphi \in \mathrm{End}_{\mathbb{C}}(V)$ ein Endomorphismus mit der Eigenschaft
   $$\varphi(\varphi(\boldsymbol{x})) = 2\varphi(\boldsymbol{x}) - 3\boldsymbol{x} \quad \text{für alle} \quad \boldsymbol{x} \in V.$$
   Geben Sie alle möglichen jordanschen Normalformen für φ an!

4. $\varphi : V \to V$ sei linearer Endomorphismus des K-Vektorraumes V mit der folgenden Eigenschaft: Jeder von $\mathbf{0}$ verschiedene Vektor aus V ist Eigenvektor von φ.
   Bestimmen Sie eine jordansche Normalform für φ.

5. Gegeben ist die folgende Matrix
   $$A = \begin{pmatrix} a & b & 0 & a \\ c & 0 & a & 0 \\ 0 & -a & a & -c \\ -a & 0 & -b & 0 \end{pmatrix}$$
   mit $a, b, c \in \mathbb{R}$ und $a \neq 0$.
   (1) Bestimmen Sie das Minimalpolynom m_A von A, indem Sie untersuchen, ob kleine Potenzen der Matrix linear abhängig sind.
   (2) Geben Sie eine notwendige und hinreichende Bedingung dafür an, dass A halbeinfach ist.

[1] Entnommen aus M. Roczen, H. Wolter, W. Pohl, D. Popescu, R. Laza: Lineare Algebra individuell Online-Version 0.62, http://www.math.hu-berlin.de/~roczen/la.htm