Übungsaufgaben[1] Lineare Algebra und analytische Geometrie II*

Serie 9 zum 15.6.11

1. f sei die Bilinearform auf $\mathbb{R}^2$, die durch
$$f((x_1,x_2),(y_1,y_2)) = 3x_1y_1 + x_1y_2 + 3x_2y_1 - 2x_2y_2$$
definiert wird.
   (1) Geben Sie die Matrix $A = \mathrm{M}_{\mathcal{B}}(f)$ von f bezüglich der Basis $\mathcal{B} = ((2,0),(1,-2))$ an.
   (2) Geben Sie die Matrix $B = \mathrm{M}_{\mathcal{B}'}(f)$ von f bezüglich der Basis $\mathcal{B}' = ((0,-2),(2,-1))$ an.
   (3) Geben Sie die Übergangsmatrix $U := \mathrm{U}_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}$ von $\mathcal{B}'$ zu $\mathcal{B}$ an und überzeugen Sie sich davon, dass $B = {}^{\mathrm{t}}U \cdot A \cdot U$ ist.

2. Es sei $A \in M(n;\mathbb{R})$, sowie $\boldsymbol{q} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ die durch $\boldsymbol{q}(\boldsymbol{x}) := \boldsymbol{x} \cdot A \cdot {}^{\mathrm{t}}\boldsymbol{x}$ definierte quadratische Form.
   (1) Zeigen Sie, dass der Wert von $\boldsymbol{q}$ nur von $A + {}^{\mathrm{t}}A$ abhängt. Folgern Sie, dass A stets durch eine eindeutig bestimmte symmetrische Matrix B ersetzt werden kann, ohne dass sich dabei die Abbildung $\boldsymbol{q}$ ändert.
   (2) Es sei $n = 3$,
$$\boldsymbol{q}(x_1,x_2,x_3) := -2x_1^2 - 4x_1x_3 - 2x_2^2 + 2x_2x_3 - 3x_3^2.$$
   Bestimmen Sie die gemäß (1) existierende symmetrische Matrix B mit der Eigenschaft $\boldsymbol{q}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x} \cdot B \cdot {}^{\mathrm{t}}\boldsymbol{x}$ für $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3$.
   (3) Geben Sie eine Basis des Standardraumes $\mathbb{R}^3$ an, bezüglich der die unter (2) definierte Form $\boldsymbol{q}$ eine Diagonalmatrix besitzt.

3. Gegeben ist die Matrix
$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathrm{M}(4,\mathbb{Q}).$$
Bestimmen Sie für die Präsentationsmatrix $\mathrm{Char}_A := X \cdot \mathrm{E}_4 - A$ von A die smithsche Normalform, d.h. eine äquivalente polynomiale Matrix $\mathrm{diag}(f_1,\ldots,f_4)$ mit normierten Polynomen $f_i \in \mathbb{Q}[X]$, die der Teilbarkeitsbedingung $f_1|f_2|f_3|f_4$ genügen.

4. Zeigen Sie, dass die jordanschen Normalformen einer komplexen Matrix A und ihrer transponierten Matrix ${}^{\mathrm{t}}A$ übereinstimmen.

---

[1] Entnommen aus M. Roczen, H. Wolter, W. Pohl, D. Popescu, R. Laza: Lineare Algebra individuell Online-Version 0.62, http://www.math.hu-berlin.de/~roczen/la.htm

5. V sei ein K-Vektorraum endlicher Dimension, $\varphi : V \to V$ ein Endomorphismus und U_1, U_2 zwei von $\mathbf{0}$ verschiedene φ-invariante Unterräume, für die $V = U_1 \bigoplus U_2$ gilt. Mit $\varphi_1 : U_1 \to U_1$ und $\varphi_2 : U_2 \to U_2$ bezeichnen wir die Einschränkungen von φ auf die beiden direkten Summanden, χ, χ_1 bzw. χ_2, bezeichnen die charakteristischen Polynome von φ, φ_1 bzw. φ_2 und m, m_1 bzw. m_2 die entsprechenden Minimalpolynome aus $K[X]$.

   Entscheiden Sie für jede der folgenden Aussagen, ob sie

   a) immer richtig,
   b) immer falsch,
   c) in Abhängigkeit von den gegebenen Daten in gewissen Fällen richtig, in anderen falsch ist.

   (1) $\chi = \chi_1 \cdot \chi_2$

   (2) $\chi = \mathrm{kgV}(\chi_1, \chi_2)$

   (3) $\chi = \mathrm{ggT}(\chi_1, \chi_2)$

   (4) $\mathrm{m} = \mathrm{m}_1 \cdot \mathrm{m}_2$

   (5) $\mathrm{m} = \mathrm{kgV}(\mathrm{m}_1, \mathrm{m}_2)$

   (6) $\mathrm{m} = \mathrm{ggT}(\mathrm{m}_1, \mathrm{m}_2)$