Übungsaufgaben[1] Lineare Algebra und analytische Geometrie II*

Serie 10 zum 20.6.11

1. Geben Sie für jede der folgenden reellen Matrizen A eine Diagonalmatrix D und eine invertierbare Matrix U an, für die $D = {}^{t}U \cdot A \cdot U$ ist.

   (1) $$A = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$$

   (2) $$A = \begin{pmatrix} -3 & -1 & 2 \\ -1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

   Welchen Rang und welche Signatur haben die entsprechenden quadratischen Formen?

2. Stellen Sie fest, welche der folgenden quadratischen Formen $\boldsymbol{q} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ positiv definit ist.

   (1) $\boldsymbol{q}(x, y, z) = -2x^2 - 2xy - 2y^2 - z^2$

   (2) $\boldsymbol{q}(x, y, z) = 4xy - 6xz + 3y^2 - 2yz + 3z^2$

   (3) $\boldsymbol{q}(x, y, z) = 3x^2 - 2xz + 2y^2 + 2yz + z^2$

3. V sei ein reeller Vektorraum, $\mathcal{B} = (\boldsymbol{b}_1, \ldots, \boldsymbol{b}_n)$ eine Basis für V und $n > 1$.
   Geben Sie eine quadratische Form $\boldsymbol{q} : V \to \mathbb{R}$ an, für die beide der folgenden Eigenschaften erfüllt sind.

   a) $\boldsymbol{q}(\boldsymbol{b}_i) > 0$ für $i = 1, \ldots, n$.

   b) $\boldsymbol{q}$ ist nicht positiv definit.

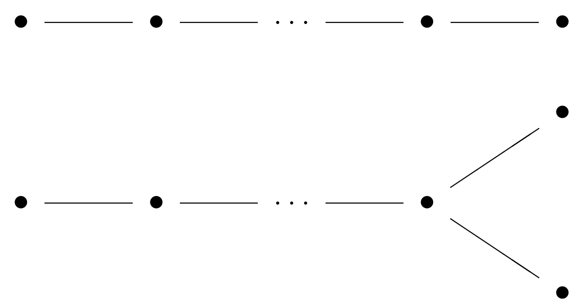
4. * Ein Graph $\Gamma := (\mathcal{E}, \mathcal{K})$ besteht aus einer (hier endlichen) Menge $\mathcal{E}$ von *Ecken* und einer Menge $\mathcal{K}$ zweielementiger Teilmengen von $\mathcal{E}$, den *Kanten*. Wir zeichnen ihn durch Angabe von Punkten (Ecken) und Verbindungslinien von Punkten (Kanten). Verwenden wir die Notation $\mathcal{E} = \{1, \ldots, n\}$, so lässt sich Γ eine quadratische Form $\boldsymbol{q}_\Gamma$ auf $\mathbb{R}^n$ zuordnen durch die Vorschrift

   $$\boldsymbol{q}_\Gamma(x_1, \ldots, x_n) := \sum_{i,j \in \{1,\ldots,n\}} a_{ij} x_i x_j$$

   mit $a_{ii} := -2$ und $a_{ij} := 1$ falls $i \neq j$ und $\{i, j\} \in \mathcal{K}$; anderenfalls setzen wir $a_{ij} := 0$.

   (1) Zeigen Sie, dass für die folgenden beiden Graphen mit jeweils n Ecken die quadratische Form $\boldsymbol{q}_\Gamma$ negativ definit ist (wobei im ersten Fall $n \geq 1$ und im zweiten $n \geq 4$ zu wählen ist).

---
[1] Entnommen aus M. Roczen, H. Wolter, W. Pohl, D. Popescu, R. Laza: Lineare Algebra individuell Online-Version 0.62, http://www.math.hu-berlin.de/~roczen/la.htm



(2) Γ heißt zusammenhängend, falls sich zwei beliebige Ecken durch eine Folge von Kanten verbinden lassen.
Finden Sie alle zusammenhängenden Graphen Γ, für die $\boldsymbol{q}_\Gamma$ negativ definit ist.

5. $Y = P + \mathbb{R}\boldsymbol{v} + \mathbb{R}\boldsymbol{w} \subseteq \mathbb{R}^4$ sei eine Parameterdarstellung der Ebene Y im 4-dimensionalen affinen Standardraum, die durch

$$P = (-1, -4, -3, -1)\,,\ \boldsymbol{v} = (-1, 3, -1, 1)\,,\ \boldsymbol{w} = (2, -2, -2, -2)$$

gegeben wird. Bestimmen Sie ein lineares Gleichungssystem mit der Lösungsmenge Y.

Lineare Algebra und analytische Geometrie II*
Lösungsblatt der Aufgabenserie 10 zum 20.6.11

1. **Ergebnis.**

(1)
$$U = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 0 & -2 \end{pmatrix},$$
$${}^{\mathrm{t}}U \cdot A \cdot U = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 18 \end{pmatrix}.$$
Es folgt $\operatorname{rang}(A) = 2$, und A hat die Signatur 0.

(2)
$$U = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & -6 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix},$$
$${}^{\mathrm{t}}U \cdot A \cdot U = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$
$\operatorname{rang}(A) = 2$ und A hat die Signatur 0.

2. **Lösung.** Zunächst werden die zugehörigen symmetrischen Matrizen bestimmt. Wir erhalten in der Reihenfolge der angegebenen Fälle
$$A = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 0 \\ -1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -3 \\ 2 & 3 & -1 \\ -3 & -1 & 3 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$
Nun wird geprüft, ob alle Hauptminoren positiv definit sind. Sobald ein Hauptminor ≤ 0 gefunden wird, ist $\boldsymbol{q}$ nicht positiv definit und die jeweilige Rechnung kann abgebrochen werden.

(1) Für die Matrix A ergibt sich
$$|-2| = -2,$$
$\boldsymbol{q}$ ist daher nicht positiv definit.

(2) Wir erhalten für die Matrix B
$$|0| = 0,$$
also ist $\boldsymbol{q}$ nicht positiv definit.

(3) Entsprechend ergibt sich für C
$$|3| = 3,$$
$$\begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 6,$$
$$\begin{vmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1,$$
d.h. $\boldsymbol{q}$ ist positiv definit.

5. **Lösung.** Ist $U := \mathrm{T}(Y) = \mathbb{R}\boldsymbol{v} + \mathbb{R}\boldsymbol{w}$ der Translationsraum von Y, so gilt $U = W^{\perp}$, wobei W den Raum derjenigen Linearformen auf $\mathbb{R}^4$ bezeichnet, die auf U verschwinden,

$$W = \{\boldsymbol{u} \in (\mathbb{R}^4)^* \mid <\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}> = <\boldsymbol{u}, \boldsymbol{w}> = 0\}\,.$$

Schreiben wir (x_1, x_2, x_3, x_4) für das Koordinatenquadrupel eines Vektors $\boldsymbol{u} \in (\mathbb{R}^4)^*$ bezüglich der dualen Basis $(\boldsymbol{e}_1^*, \ldots, \boldsymbol{e}_4^*)$, so ist die Bedingung $\boldsymbol{u} \in W$ dazu äquivalent, dass das homogene lineare Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} -1 & 3 & -1 & 1 \\ 2 & -2 & -2 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

erfüllt ist. Eine zeilenäquivalente Umformung der Koeffizientenmatrix ergibt die Stufenmatrix

$$\begin{pmatrix} -1 & 3 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

aus der sich eine Basis $((2,1,1,0), (1,0,0,1))$ der Lösungsmenge ablesen lässt. Bezeichnet A die Matrix mit diesen Zeilen, so ist $Ax = A \cdot {}^{\mathrm{t}}P$ ein Gleichungssystem, dessen Lösungsmenge den Punkt $P \in Y$ enthält und dessen zugehöriges homogenes System die Lösungsmenge $\mathrm{T}(Y) = U$ besitzt. Wir erhalten

$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 + x_3 &= -9 \\ x_1 + x_4 &= -2 \end{aligned}$$

als lineares Gleichungssystem mit der Lösungsmenge Y.