Übungsaufgaben[1] Lineare Algebra und analytische Geometrie II*

Serie 11 zum 27.6.11

1. Im affinen Standardaum $\mathbb{F}_3^4$ wird der Unterraum Y_1 durch das lineare Gleichungssystem

$$\begin{aligned} x_1 - x_3 &= 1 \\ x_1 + x_2 - x_3 &= 0 \end{aligned}$$

und der Unterraum Y_2 durch das lineare Gleichungssystem

$$\begin{aligned} -x_2 + x_3 + x_4 &= 1 \\ -x_1 + x_4 &= 0 \end{aligned}$$

gegeben. Bestimmen Sie für Y_1, $Y_1 \cap Y_2$, $Y_1 \vee Y_2$ je eine affine Basis!

2. $A := (\mathbb{F}_2)^3$ sei der affine Standardraum über dem zweielementigen Körper $\mathbb{F}_2$.
   (1) Wieviele Punkte hat A?
   (2) Wieviele Geraden enthält A?
   (3) Wieviele Ebenen enthält A?

3. $X = K^n$ sei der n-dimensionale affine Standardraum über dem Körper K, $P_1, \ldots, P_n \in X$ mit $\dim(P_1 \vee \ldots \vee P_n) = n - 1$, d.h. $Y = P_1 \vee \ldots \vee P_n$ ist eine Hyperebene.
   (1) Zeigen Sie, dass für $P_i = (p_{i1}, \ldots, p_{in})$ durch

$$\det \begin{pmatrix} x_1 & \ldots & x_n & 1 \\ p_{11} & \ldots & p_{1n} & 1 \\ \vdots & \ldots & \vdots & \vdots \\ p_{n1} & \ldots & p_{nn} & 1 \end{pmatrix} = 0$$

   eine Gleichung mit der Lösungsmenge Y gegeben ist.
   (2) Im affinen Raum $\mathbb{R}^3$ sei $Y = (-2, -4, 0) \vee (-5, -4, -1) \vee (-5, -1, -1)$. Bestimmen Sie mittels (1) eine Gleichung für Y.

4. $A := \mathbb{C}^n$ sei der affine Standardraum über dem Körper $\mathbb{C}$ der komplexen Zahlen, $f : A \longrightarrow A$ die durch $f(z_1, \ldots, z_n) := (\overline{z}_1, \ldots, \overline{z}_n)$ (komplexe Konjugation) gegebene Abbildung.
   (1) Zeigen Sie: f ist Kollineation (d.h. jede Gerade $G \subseteq A$ wird durch f auf eine Gerade $f(G)$ abgebildet).
   (2) Ist f eine affine Abbildung?

5. Wir betrachten den affinen Standardraum $X = \mathbb{R}^3$.

[1] Entnommen aus M. Roczen, H. Wolter, W. Pohl, D. Popescu, R. Laza: Lineare Algebra individuell Online-Version 0.62, http://www.math.hu-berlin.de/~roczen/la.htm

(1) Zeigen Sie: $\mathcal{B} = (P_0, P_1, P_2, P_3)$ mit

$$P_0 := (1,1,0)\,,\ P_1 := (1,2,1)\,,\ P_2 := (2,3,1)\,,\ P_3 := (2,3,3)$$

ist eine affine Basis von X.

(2) Durch $2x_1 + 3x_2 - 4x_3 = 3$ wird eine Ebene E in $\mathbb{R}^3$ gegeben. Bestimmen Sie eine Gleichung für E in den Koordinaten bezüglich $\mathcal{B}$.

Lineare Algebra und analytische Geometrie II*
Lösungsblatt der Aufgabenserie 11 zum 27.6.11

1. **Lösung.** Mit dem gaußschen Algorithmus ist für das erste Gleichungssystem leicht die Lösungsmenge
$$Y_1 = \{\,(1,-1,0,0) + t_1\cdot(1,0,1,0) + t_2\cdot(0,0,0,1) \mid\ t_1\,,\ t_2 \in \mathbb{F}_3\}$$
zu finden. Aus der Parameterdarstellung $Y_1 = P + \mathbb{F}_3\boldsymbol{v}_1 + \mathbb{F}_3\boldsymbol{v}_2$ mit
$$P = (1,-1,0,0)\,,\quad \boldsymbol{v}_1 = (1,0,1,0)\,,\quad \boldsymbol{v}_2 = (0,0,0,1)$$
erhalten wir eine affine Basis $\{P, P_1, P_2\}$, wobei
$$P_1 = P + \boldsymbol{v}_1 = (-1,-1,1,0)\,,\quad P_2 = P + \boldsymbol{v}_2 = (1,-1,0,1)$$
gewählt wurden.
Nun wird der Durchschnitt $Y_1 \cap Y_2$ bestimmt. Wir erhalten ihn durch das lineare Gleichungssystem
$$\begin{aligned} x_1 - x_3 &= 1 \\ x_1 + x_2 - x_3 &= 0 \\ -x_2 + x_3 + x_4 &= 1 \\ -x_1 + x_4 &= 0 \end{aligned}$$
(gebildet aus den Gleichungen für Y_1 und Y_2). Die Lösungsmenge ist
$$Y_1 \cap Y_2 = \{\,(-1,-1,1,-1)\,\},$$
und dieser Punkt bildet gleichzeitig eine affine Basis des Unterraumes $Y_1 \cap Y_2$.
Zur Bestimmung einer affinen Basis für $Y_1 \vee Y_2$ erinnern wir an die Dimensionsformel für den Verbindungsraum. Sie lautet (für $Y_1 \cap Y_2 \neq \emptyset$)
$$\dim(Y_1 \vee Y_2) = \dim(Y_1) + \dim(Y_2) - \dim(Y_1 \cap Y_2),$$
woraus wegen $\dim(Y_1) = \dim(Y_2) = 2$ und $\dim(Y_1 \cap Y_2) = 0$ sofort $\dim(Y_1 \vee Y_2) = 4$, d.h. $Y_1 \vee Y_2 = \mathbb{F}_3^4$ folgt. Affine Basis von $Y_1 \vee Y_2$ ist daher jede beliebige affine Basis des Raumes $\mathbb{F}_3^4$, beispielsweise die kanonische Basis
$$((0,0,0,0),(1,0,0,0),(0,1,0,0),(0,0,1,0),(0,0,0,1)).$$

3. **Lösung für Teil (2).** Offensichtlich ist
$$\det\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & 1 \\ -2 & -4 & 0 & 1 \\ -5 & -4 & -1 & 1 \\ -5 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = 3x_1 - 9x_3 + 6 = 0$$
die gesuchte Gleichung.

Anmerkung. Es ist leicht zu sehen, dass die gegebenen Punkte affin unabhängig sind. Allerdings ist es unnötig, das zu prüfen, denn im Fall affiner Abhängigkeit müsste die angegebene Determinante identisch verschwinden.