Übungsaufgaben[1] Lineare Algebra und analytische Geometrie II*

Serie 12 zum 4.7.11

1. Zeigen Sie, dass sich die Geraden
   $$G_1 = (3,-1,1) \vee (4,-1,2)\,,$$
   $$G_2 = (0,-3,0) \vee (2,-2,1)$$
   im euklidischen affinen Standardraum $\mathbb{R}^3$ schneiden und bestimmen Sie den Schnittwinkel. (Der Schnittwinkel ist derjenige Winkel im Intervall $[0, \frac{\pi}{2}]$, der durch zwei geeignete, von $\mathbf{0}$ verschiedene Vektoren der Translationsräume gebildet wird.)

2. Verwenden Sie das Orthogonalisierungsverfahren nach E. Schmidt zur Bestimmung einer Orthonormalbasis des euklidischen Standardraumes $\mathbb{R}^3$, deren Fahne durch die folgende Basis $(\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3)$ gegeben ist:
   $$\boldsymbol{v}_1 = (-1,-1,0)\,, \quad \boldsymbol{v}_2 = (2,1,-2)\,, \quad \boldsymbol{v}_3 = (2,-2,3)\,.$$

3. φ sei ein Endomorphismus des euklidischen Vektorraumes V und $\varphi^\star$ sein adjungierter Endomorphismus.
   Beweisen Sie: $\ker(\varphi) = \ker(\varphi^\star \cdot \varphi)$.

4. Für die folgenden Matrizen A, B ist jeweils eine Orthonormalbasis des euklidischen Standardvektorraumes $\mathbb{R}^3$ zu finden, die aus Eigenvektoren besteht.
   (1) $$A = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -5 & 0 & 2 \\ 0 & -7 & -2 \\ 2 & -2 & -6 \end{pmatrix},$$
   (2) $$B = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} -22 & 10 & 10 \\ 10 & -7 & 20 \\ 10 & 20 & -7 \end{pmatrix}.$$

5.* P_n sei der euklidische Vektorraum der reellen Polynome vom Grad $\leq n$ in $\mathbb{R}[X]$ mit dem Skalarprodukt, das für
   $$f = a_0 + a_1X + \ldots + a_nX^n,\ g = b_0 + b_1X + \ldots + b_nX^n$$
   (mit $a_i, b_j \in \mathbb{R}$) durch
   $$<f,g>= a_0b_0 + \ldots + a_nb_n$$
   definiert ist. $\varphi^\star$ sei der adjungierte Endomorphismus des Ableitungsoperators φ von P_n.
   (1) Bestimmen Sie die φ-invarianten Unterräume von P_n.
   (2) Zeigen Sie: $U \subseteq \mathrm{P}_n$ ist genau dann φ-invariant, wenn $U^\perp$ ein $\varphi^\star$-invarianter Unterraum ist.
   (3) Bestimmen Sie die $\varphi^\star$-invarianten Unterräume von P_n.

---

[1] Ein * weist auf eine fakultative Aufgabe hin.
Entnommen aus M. Roczen, H. Wolter, W. Pohl, D. Popescu, R. Laza: Lineare Algebra individuell Online-Version 0.62, http://www.math.hu-berlin.de/~roczen/la.htm

Lineare Algebra und analytische Geometrie II*
Lösungsblatt der Aufgabenserie 12 zum 4.7.11

1. **Lösung.** Die Bedingung $G_1 \cap G_2 \neq \emptyset$ ist offensichtlich äquivalent dazu, dass das lineare Gleichungssystem

$$(3, -1, 1) + s \cdot (1, 0, 1) = (0, -3, 0) + t \cdot (2, 1, 1)$$

eine Lösung $(s, t) \in \mathbb{R}^2$ besitzt. Nun ist

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & -3 \\ 0 & -1 & -2 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

die erweiterte Koeffizientenmatrix dieses Systems, und leicht finden wir eine zeilenäquivalente Stufenmatrix

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Daraus ist zu entnehmen, dass der Rang der Koeffizientenmatrix mit dem der erweiterten Koeffizientenmatrix übereinstimmt, d.h. $G_1 \cap G_2 \neq \emptyset$.

Die Verbindungsvektoren der gegebenen Punkte sind Erzeugende der entsprechenden Translationsräume. Wir erhalten $\mathrm{T}(G_1) = \mathbb{R}\boldsymbol{v}$ und $\mathrm{T}(G_2) = \mathbb{R}\boldsymbol{w}$ mit $\boldsymbol{v} = (1, 0, 1)$, $\boldsymbol{w} = (2, 1, 1)$. Für den Schnittwinkel α der Geraden G_1 und G_2 ergibt sich

$$\cos^2(\alpha) = \frac{<\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}>^2}{<\boldsymbol{v}, \boldsymbol{v}> \cdot <\boldsymbol{w}, \boldsymbol{w}>} = \frac{3}{4},$$

folglich

$$\alpha = \arccos(\frac{1}{2}\sqrt{3}) = \frac{\pi}{6}.$$

2. **Lösung.** Wir orthogonalisieren zunächst die gegebene Basis. Dazu wird $\boldsymbol{b}_1 := \boldsymbol{v}_1$ gewählt und $\boldsymbol{b}_2 := x_1\boldsymbol{b}_1 + \boldsymbol{v}_2$ als Vektor, für den $<\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2>= 0$ ist, d.h.

$$x_1 <\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_1> + <\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{v}_2> = 0 \quad \text{mit} \quad <\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_1> = 2\,, \ <\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{v}_2> = -3\,.$$

Es folgt $x_1 = \frac{3}{2}$, und Einsetzen ergibt $\boldsymbol{b}_2 = (\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -2)$.

Analog werden $y_1, y_2 \in \mathbb{R}$ gewählt, für die

$$\boldsymbol{b}_3 = y_1\boldsymbol{b}_1 + y_2\boldsymbol{b}_2 + \boldsymbol{v}_3\,, \quad <\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_3> = <\boldsymbol{b}_2, \boldsymbol{b}_3> = 0$$

ist, daher

$$y_1 <\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_1> + <\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{v}_3> = \ y_2 <\boldsymbol{b}_2, \boldsymbol{b}_2> + <\boldsymbol{b}_2, \boldsymbol{v}_3> = \ 0\,.$$

Aus

$$<\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{v}_3> = 0\,, \quad <\boldsymbol{b}_2, \boldsymbol{b}_2> = \frac{9}{2}\,, \quad <\boldsymbol{b}_2, \boldsymbol{v}_3> = -4$$

erhalten wir

$$y_1 = 0\,, \quad y_2 = \frac{8}{9}\,.$$

Durch Einsetzen ergibt sich der dritte Basisvektor $\boldsymbol{b}_3 = (\frac{22}{9}, -\frac{22}{9}, \frac{11}{9})$.

Abschließend wird die gefundene Orthogonalbasis $(\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \boldsymbol{b}_3)$ durch Multiplikation mit Konstanten normiert; wir erhalten z.B. die Orthonormalbasis

$$\Big(\frac{1}{\sqrt{2}}\,(1,1,0)\,,\ \frac{1}{\sqrt{18}}\,(-1,1,4)\,,\ \frac{1}{\sqrt{9}}\,(2,-2,1)\Big)\,.$$

Anmerkung. Vor dem Normieren kann ein Vektor mit einem beliebigen Faktor ($\neq 0$) multipliziert werden; auf diese Weise wird das Rechnen mit Brüchen oder gemeinsamen Faktoren der Komponenten weitgehend überflüssig!

4. **Lösung.**

(1) Zunächst bestimmen wir die Eigenwerte der Matrix A; sie ergeben sich als Nullstellen des charakteristischen Polynoms

$$\chi_A = \det(X\cdot \mathrm{E}_3 - A) = (X+3)\cdot(X+1)\cdot(X+2)\,,$$

das wir (um unnötige Brüche zu vermeiden) zweckmäßig mittels

$$3^3\cdot\chi_A = \det\begin{pmatrix} 3X+5 & 0 & -2 \\ 0 & 3X+7 & 2 \\ -2 & 2 & 3X+6 \end{pmatrix}$$

$$= 27X^3 + 162X^2 + 297X + 162,$$

$$\chi_A = X^3 + 6X^2 + 11X + 6$$

berechnet haben. Die Nullstellen sind paarweise verschieden, d.h. jeder der Eigenräume ist eindimensional. Daher genügt es, für jeden Eigenwert λ einen von $\mathbf{0}$ verschiedenen Vektor im Lösungsraum des entsprechenden homogenen linearen Gleichungssystems zu wählen und zu normieren. So finden wir eine Orthonormalbasis

$$\Big(\frac{1}{3}(-1,2,2), \frac{1}{3}(-2,1,-2), \frac{1}{3}(-2,-2,1)\Big)\,.$$

(2) In diesem Fall wird zunächst analog vorgegangen: Es ist

$$\chi_B = \det(X\cdot \mathrm{E}_3 - B) = (X-2)\cdot(X+3)^2\,,$$

und für den Eigenwert $\lambda_1 = 2$ ergibt sich ein Eigenvektor $(-1,-2,-2)$. Der Eigenraum zu $\lambda_2 = -3$ jedoch ist zweidimensional. Wir bestimmen eine Basis, indem wir das homogene lineare Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} -1 & -2 & -2 \\ -2 & -4 & -4 \\ -2 & -4 & -4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

lösen (wobei wieder in der charakteristischen Gleichung Brüche vermieden wurden); wir erhalten mit dem gaußschen Algorithmus (oder „auf den ersten Blick“)

$$\mathcal{B}' = ((-2,1,0),(-2,0,1))\,.$$

Nach dem Orthogonalisierungsverfahren entsteht daraus

$$\mathcal{B}'_{\text{orth}} = ((-2,1,0),(-2,-4,5))\,,\ \text{d.h.}$$

$$\mathcal{B} = ((-1,-2,-2),(-2,1,0),(-2,-4,5))$$

ist eine Orthogonalbasis von $\mathbb{R}^3$, die aus Eigenvektoren der Matrix B besteht. Aus $\mathcal{B}$ ergibt sich eine Orthonormalbasis

$$\Big(\frac{1}{3}(-1,-2,-2), \frac{\sqrt{5}}{5}(-2,1,0), \frac{\sqrt{5}}{15}(-2,-4,5)\Big)\,.$$