# Übungsaufgaben[1] Lineare Algebra und analytische Geometrie II*

## Serie 13 zum 11.7.11

1. $\varphi$ und $\psi$ seien Endomorphismen des euklidischen Vektorraumes $V$ und $\varphi^*$ der zu $\varphi$ adjungierte.

   Beweisen Sie: Ist $\varphi^*\psi = 0$, so gilt $\operatorname{im}(\varphi) \perp \operatorname{im}(\psi)$.

2. Überprüfen Sie, dass die Matrizen

   (1) $$\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 2 \\ 2 & -1 & -2 \end{pmatrix}$$

   (2) $$\frac{1}{4}\cdot\begin{pmatrix} \sqrt{3}+2 & \sqrt{3}-2 & \sqrt{2} \\ \sqrt{3}-2 & \sqrt{3}+2 & \sqrt{2} \\ -\sqrt{2} & -\sqrt{2} & 2\sqrt{3} \end{pmatrix}$$

   bezüglich der Standardbasis des euklidischen Standardraumes $\mathbb{R}^3$ orthogonale Abbildungen definieren. Beschreiben Sie die Wirkung dieser Abbildungen!

3. Wir betrachten die euklidische Ebene $E$.

   (1) Zeigen Sie: Sind $\varphi$ und $\psi$ Spiegelungen von $E$, so ist $\varphi \cdot \psi$ eine Drehung oder die Identität.

   (2) Wir beziehen uns nun auf eine fest gewählte Orthonormalbasis und die durch sie gegebene Orientierung.
   $\varphi$ sei die Spiegelung an der Geraden, die gegen die erste Koordinatenachse um den Winkel $\dfrac{\pi}{6}$ geneigt ist, $\psi$ die Spiegelung an der Geraden, die gegen die erste Koordinatenachse um den Winkel $\dfrac{\pi}{3}$ geneigt ist.
   Welchen Drehwinkel hat $\varphi \cdot \psi$ ?

4. $V$ sei ein euklidischer Vektorraum.

   (1) Wir wählen zwei Vektoren $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in V$ mit $\|\boldsymbol{x}\| = \|\boldsymbol{y}\|$. Beweisen Sie: Es existiert eine orthogonale Abbildung $\varphi : V \to V$ mit $\varphi(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{y}$.

   (2) Gegeben sind die Vektoren $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{y}_1, \boldsymbol{y}_2 \in V$ mit $\|\boldsymbol{x}_1\| = \|\boldsymbol{y}_1\|$, $\|\boldsymbol{x}_2\| = \|\boldsymbol{y}_2\|$ und der Eigenschaft, dass der Winkel zwischen $\boldsymbol{x}_1$ und $\boldsymbol{x}_2$ mit dem Winkel zwischen $\boldsymbol{y}_1$ und $\boldsymbol{y}_2$ übereinstimmt. Beweisen Sie: Es existiert eine orthogonale Abbildung $\varphi : V \to V$ mit $\varphi(\boldsymbol{x}_1) = \boldsymbol{y}_1$, $\varphi(\boldsymbol{x}_2) = \boldsymbol{y}_2$.

[1] Entnommen aus M. Roczen, H. Wolter, W. Pohl, D. Popescu, R. Laza: Lineare Algebra individuell Online-Version 0.62, http://www.math.hu-berlin.de/~roczen/la.htm

5. Geben Sie für das quadratische Polynom

$$f = X_1^2 - 4X_1X_2 + 4X_2^2 + X_1 + 3X_2 + 3 \in \mathbb{R}[X_1, X_2]$$

eine Bewegung der affinen euklidischen Standardebene an, so dass nach der entsprechenden Koordinatentransformation und Multiplikation mit einer von Null verschiedenen Konstanten eine metrische Hauptachsenform entsteht. Bestimmen Sie $f$ im neuen Koordinatensystem.