

Römisch, W. <sup>1)</sup>; Schulze, R. <sup>2)</sup>

EIN VERFAHREN ZUR SIMULATION STOCHASTISCHER PROZESSE;  
ANWENDUNG AUF SPEZIELLE PROZESSKLASSEN

In der Praxis spielen nichtlineare Probleme der stochastischen Analysis eine immer größere Rolle. Erwähnt seien hier nur folgende Problemklassen:

- nichtlineare Differentialgleichungen mit zufälliger rechter Seite bzw. zufälligen Koeffizienten,
- stochastische Optimalsteuerungsprobleme.

Auf Grund des nichtlinearen Charakters dieser Aufgaben versagen in der Regel spezielle Methoden zu ihrer Behandlung, wie z.B. die Korrelationsmethoden für lineare Differentialgleichungen mit zufälliger rechter Seite. Dagegen erweisen sich Simulationsmethoden als universell einsetzbar, die auf folgendem Prinzip beruhen: Zunächst wird eine endliche Anzahl von Realisierungen der stochastischen Eingangsgrößen näherungsweise bestimmt, dann werden für diese endliche Familie von Eingangsrealisierungen determinierte Probleme gelöst und abschließend aus den erhaltenen Ausgangsrealisierungen durch Mittelwertbildung Kenngrößen des stochastischen Ausgangs, wie z.B. Mittelwerts-, Korrelations-, Moment- und Verteilungsfunktionen, berechnet (vgl./6/). Als erstes wichtiges Problem bei diesem Vorgehen erweist sich die Simulation der stochastischen Eingangsgrößen. Wünschenswert wäre dazu ein möglichst universelles Prinzip zur Simulation, für das Konvergenzaussagen gewährleistet sind und das bei speziellen Prozessen bzw. Prozeßklassen unmittelbar in effektive numerische Verfahren umgesetzt werden kann. Aus der Literatur bekannte Verfahren zur Simulation beruhen meist auf Reihenentwicklungen stochastischer Prozesse mit zufälligen Koeffizienten, wobei sich

---

<sup>1), 2)</sup> Dr. rer. nat., Humboldt-Universität Berlin, DDR

Mittelwerte und Varianzen dieser Koeffizienten aus Mittelwerts- und Korrelationsfunktion des zu simulierenden Prozesses berechnen lassen (vgl./5/ und die dort zitierte Literatur). Die Berechnung von Verteilungsfunktionen der Koeffizienten aus entsprechenden Kenngrößen des Prozesses ist i.a. unmöglich. Deshalb stellt dieses Vorgehen de facto eine Beschränkung auf Gaußsche Prozesse dar bzw. ist im nichtlinearen Fall nicht anwendbar. Hinzu kommt, daß zur praktischen Simulation des Prozesses der Einsatz von (Pseudo-) Zufallsgeneratoren für die digitale Simulation der Koeffizienten unumgänglich ist. Im folgenden soll nun ein Verfahren zur Simulation stochastischer Prozesse vorgestellt werden, daß die oben genannten wünschenswerten Eigenschaften besitzt und ohne Hilfe von Zufallsgeneratoren arbeitet. Dabei gehen wir so vor, daß nach einer kurzen mathematischen Einführung das allgemeine Prinzip des Verfahrens dargelegt und eine umfassende Konvergenzaussage angegeben werden und daß anschließend das spezialisierte Verfahren zur numerischen Simulation Gaußscher Prozesse (Beispiel: WIENER-Prozeß) angeführt wird.

Im weiteren sei  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$  ein Wahrscheinlichkeitsraum,  $(\mathbb{R}^1, \mathcal{B}^1)$  der Borelsche Meßraum und  $T$  eine Menge von Zeitpunkten. Für eine reelle Zufallsvariable  $z$  über  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$  bezeichne  $E(z)$  bzw.  $E(z|A)$  ( $A \in \mathcal{A}$ ,  $P(A) > 0$ ) den Erwartungswert von  $z$  bzw. den bedingten Erwartungswert von  $z$  bzgl. des Ereignisses  $A$ .  $L_p(\Omega, \mathcal{A}, P)$  bezeichne den linearen Raum aller reellen Zufallsvariablen  $z$  mit  $E(|z|^p) < \infty$  ( $1 \leq p < \infty$ ). Bekanntlich wird  $L_p(\Omega, \mathcal{A}, P)$  mit der Norm  $\|z\|_p := (E(|z|^p))^{1/p}$  ein Banachraum. Schließlich bezeichne  $x$  stets einen stochastischen Prozeß über  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$  mit Parametermenge  $T$  und Zustandsraum  $\mathbb{R}^1$ . Wir nennen  $x$  einen Prozeß  $p$ -ter Ordnung, falls für alle  $t \in T$   $x(t) \in L_p(\Omega, \mathcal{A}, P)$  erfüllt ist. Später wird noch der Begriff der stochastischen Stetigkeit eine Rolle

spielen (vgl./2/ bzw. Bem. (e)). Wir kommen nun zur Konstruktion von Prozessen mit endlich vielen Realisierungen, die einen gegebenen stochastischen Prozeß  $x$  erster Ordnung approximieren:

(A)(a)  $\{t_i\}_{i \in \mathbb{N}} \subseteq T$  sei eine in  $T$  dichte Menge von Zeitpunkten ( $\mathbb{N} :=$  Menge der natürlichen Zahlen),

(b)  $\{ \{I_{j,i}^{(n)}\}_{j=1}^n \}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{Z}^1$  ( $i \in \mathbb{N}$ ) seien Familien von Intervallen mit folgenden Eigenschaften:

(i)  $I_{j,i}^{(n)} \cap I_{j',i}^{(n)} = \emptyset$ ,  $j \neq j'$ ,  $\bigcup_{j=1}^n I_{j,i}^{(n)} = R^1$ ,  $n \in \mathbb{N}$ ,

(ii)  $\{ \{I_{j,i}^{(m)}\}_{j=1}^m \}_{m > n}$  stellt für  $m > n$  eine Verfeinerung von  $\{ \{I_{j,i}^{(n)}\}_{j=1}^n \}$  dar,

(iii)  $\{ \{ \{I_{j,i}^{(n)}\}_{j=1}^n \}_{n \in \mathbb{N}} \}$  erzeugt die  $\sigma$ -Algebra  $\mathcal{Z}^1$ .

(B) Für  $n, k \in \mathbb{N}$  und  $l = 1, \dots, n^k$  definieren wir die Ereignisse:  $A_1^{(n,k)} := \bigcap_{i=1}^k [x(t_i)]^{-1}(I_{l_i,i}^{(n)})$

wobei jedem  $l$  durch die Beziehung

$l = 1 + \sum_{i=1}^k (l_i - 1)n^{i-1}$  eineindeutig ein Multiindex

$(l_1, \dots, l_k)$ ,  $l_i \in \{1, \dots, n\}$ ,  $i = 1, \dots, k$ , zugeordnet sei (Bez.:  $l \longleftrightarrow (l_1, \dots, l_k)$ ).

Für feste  $n$  bzw.  $k$  sind diese Ereignisse nach Konstruktion paarweise disjunkt und ihre Vereinigung ergibt die Grundmenge  $\Omega$ .

(C) Für alle  $n, k \in \mathbb{N}$  definieren wir folgende Prozesse mit endlich vielen Realisierungen:

$x_{n,k}(t, \omega) := E(x(t) | A_1^{(n,k)})$ ,  $t \in T$ , falls  $\omega \in A_1^{(n,k)}$   
( $l = 1, \dots, n^k$ ).

Satz (Konvergenzaussage):

Vor.:  $x$  sei stochastisch stetiger Prozeß erster Ordnung

Beh.: (a) Für alle  $t \in T$  gilt:

$\lim_{n,k \rightarrow \infty} x_{n,k}(t, \omega) = x(t, \omega)$  fast sicher,

$\lim_{n,k \rightarrow \infty} \|x_{n,k}(t) - x(t)\|_p = 0$ , falls  $x(t) \in L_p(\Omega, \mathcal{A}, P)$ ,

(b) Ist  $T$  eine in  $R^1$  kompakte Menge,  $x$  ein Prozeß zweiter Ordnung und die Korrelationsfunktion

$$R_{xx}(t,s) := E(x(t)x(s)) \text{ stetig, so gilt:}$$

$$\lim_{n,k \rightarrow \infty} \max_{t \in I} \|x_{n,k}(t) - x(t)\|_2 = 0$$

Einen Beweis dieser Aussage findet man in /3/ bzw. /4/. Dort ist unter weiteren Voraussetzungen für  $x$  auch eine Fehlerabschätzung abgeleitet worden.

Bemerkungen:

(a) Aus den bisherigen Betrachtungen ist ersichtlich, daß bei Kenntnis von  $E(x(\cdot) | A_1^{(n,k)})$  und  $P(A_1^{(n,k)})$ ,  $l=1, \dots, n^k$ , für gewisse  $n, k \in \mathbb{N}$ , die eingangs formulierte Aufgabe der näherungsweise Simulation eines stochastischen Prozesses  $x$  gelöst ist.

(b) Auf Grund der Konstruktion der  $A_1^{(n,k)}$  in (B) ergeben sich mit Hilfe der endlichdimensionalen Verteilungsfunktionen  $F_x(t_1, \dots, t_m; a_1, \dots, a_m)$ ,  $m \in \mathbb{N}$ , von  $x$  folgende Beziehungen:

$$(I) \quad P(A_1^{(n,k)}) = \int_{I_{1,1}^{(n)}} \dots \int_{I_{1,k}^{(n)}} dF_x(t_1, \dots, t_k; a_1, \dots, a_k)$$

$$(II) \quad \frac{E(x(t) | A_1^{(n,k)})}{P(A_1^{(n,k)})} = \int_{R^1} \int_{I_{1,1}^{(n)}} \dots \int_{I_{1,k}^{(n)}} a_0 dF_x(t, t_1, \dots, t_k; a_0, \dots, a_k)$$

für  $l=1, \dots, n^k$ ,  $l \leftrightarrow (l_1, \dots, l_k)$ ,  $t \in T \setminus \{t_i\}_{i=1}^k$   
 (für  $t=t_i$  vereinfacht sich (II)).

Analoges erhält man mit Hilfe der Verteilungsdichtefunktionen von  $x$ .

(c)  $P(A_1^{(n,k)})$ ,  $E(x(t) | A_1^{(n,k)})P(A_1^{(n,k)})$  ( $l=1, \dots, n^k$ ) stellen selbst gewisse Kenngrößen des stochastischen Prozesses  $x$  dar (vgl. /3/, Kap. 6.5.). Aus diesem Grund ist es möglich, sie direkt aus Messungen zu gewinnen. Dabei erfordert ihre praktische Messung nicht mehr Aufwand als die Messung vergleichbarer Verteilungsfunktionen.

(d) I.a. müssen zur praktischen Realisierung der Formeln (I) und (II), Methoden der numerischen Integration angewendet werden. Bei weiteren Voraussetzungen für  $x$ ,

z.B. für Gaußsche Prozesse und andere Prozeßklassen, vereinfachen sich allerdings (I),(II) wesentlich.

(e) Die im Satz genannte Voraussetzung der stochastischen Stetigkeit von  $x$  auf  $T$  ist z.B. erfüllt, wenn  $x$  fast sicher stetig (R-stetig) oder im  $p$ -ten Mittel stetig ist. Insbesondere ist der Satz anwendbar, falls  $x$  eine stetige Korrelationsfunktion besitzt (vgl./1/,/2/).

Wir erwähnen noch, daß die Realisierungen  $E(x(\cdot) | A_1^{(n,k)})$  stetig sind, falls  $x$  im Mittel stetig ist.

(f) Da der Aufwand des Verfahrens mit  $n^k$  schnell anwächst ist für feste  $n, k \in \mathbb{N}$  die konkrete Wahl von  $\{t_i\}_{i=1}^k$ ,  $\{I_{j,i}^{(n)}\}_{j=1}^n$  von Bedeutung. Aus der bereits oben erwähnten Fehlerabschätzung ist ersichtlich, daß bei einer

Wahl von  $\{I_{j,i}^{(n)}\}_{j=1}^n$  aus der Bedingung

$P([x(t_i)]^{-1}(I_{j,i}^{(n)})) = 1/n, i=1, \dots, k, j=1, \dots, n$ , eine geeignete Anpassung an das statistische Verhalten von  $x$  erfolgt.

(g) Das dargelegte Verfahren ist auch zur Simulation diskreter Prozesse ( $T=nz$ ) und zufälliger Vektoren ( $T=\{1, \dots, m\}$ ) anwendbar. Eine Verallgemeinerung besteht z.B. darin, einen allgemeinen Zustandsraum  $X$  mit zugehöriger  $\sigma$ -Algebra  $\mathcal{G}$  zu betrachten. Dann würden mit  $X=\mathbb{R}^m$  auch vektorielle Prozesse erfaßt.

#### Numerische Simulation Gaußscher Prozesse:

Auf Grund der speziellen Gestalt der Verteilungsdichten läßt sich (II) mit Hilfe eines verallgemeinerten Mittelwertsatzes wesentlich vereinfachen. (I) wird mit Hilfe einer  $k$ -dimensionalen Rechteckregel näherungsweise berechnet. Wählt man schließlich noch  $\{I_{j,i}^{(n)}\}_{j=1}^n$  gemäß Bem.(f), so erhält man folgenden Algorithmus:

Gegeben: Mittelwerts- und Kovarianzfunktion  $m_x(t) = E(x(t))$

bzw.  $K_{xx}(t,s) = E((x(t) - m_x(t))(x(s) - m_x(s)))$

(a) Wahl von  $n, k \in \mathbb{N}$ ,  $\epsilon_n > 0$  "klein" ;

(b) Wahl von  $\{t_i\}_{i=1}^k$  in  $T$  ;

(c) Wahl von  $\{I_{j,i}^{(n)}\}_{j=1}^n$ ,  $i=1, \dots, k$ :

$c_j^{(n)} := F_S^{-1}(\epsilon_n + j(1-2\epsilon_n)/n)$ ,  $j=0, \dots, n$ , wobei  $F_S$  die Standard-Normalverteilung, d.h.  $N(0,1)$ -Verteilung, darstellt.

$$\begin{aligned} \tilde{I}_{j2}^{(n)} &:= [c_{j-1}^{(n)}, c_j^{(n)}], \quad j=1, \dots, n, \\ \sigma_i &:= K_{XX}(t_i, t_i), \quad i=1, \dots, k, \quad I_{j,i}^{(n)} := \sigma_i \tilde{I}_j^{(n)}; \end{aligned}$$

(d)  $E(x(t) | A_1^{(n,k)}) = m_X(t) + \bar{a}_1 K_X^{-1} k(t)$ ,  $t \in T$ ,

$$P(A_1^{(n,k)}) = ((2\pi)^k \det(K_X))^{-1/2} \exp(-1/2 \bar{a}_1' K_X^{-1} \bar{a}_1) \prod_{i=1}^k \sigma_i (c_{l_i}^{(n)} - c_{l_i-1}^{(n)})$$

für  $l=1, \dots, n^k$ ,  $l \longleftrightarrow (l_1, \dots, l_k)$ , wobei

$$K_X := (K_{XX}(t_i, t_j))_{i,j=1, \dots, k},$$

$$k(t) := (K_{XX}(t_1, t), \dots, K_{XX}(t_k, t))',$$

$$\bar{a}_1 := (\sigma_1 \bar{c}_{l_1}^{(n)}, \dots, \sigma_k \bar{c}_{l_k}^{(n)}), \quad \tilde{a}_1 := (\sigma_1 \bar{c}_{l_1}^{(n)}, \dots, \sigma_k \bar{c}_{l_k}^{(n)}),$$

und  $\bar{c}_j^{(n)}, \tilde{c}_j^{(n)} \in \tilde{I}_j^{(n)}$  geeignet gewählt seien.

Beispiel: Simulation des WIENER-Prozesses als Gaußscher Prozeß mit  $m_X(t) \equiv 0$ ,  $K_{XX}(t,s) = \min(t,s)$ ,  $T = [0, \infty)$

Wir wählen  $n, k \in \mathbb{N}$  und  $0 < t_1 < \dots < t_k < \infty$ . Dann läßt sich auf Grund der speziellen Gestalt der Kovarianzmatrix  $K_X$  direkt  $K_X^{-1}$  angeben (vgl./7/) und man erhält folgendes Ergebnis für die Realisierungen:

$$E(x(t) | A_1^{(n,k)}) = \begin{cases} \frac{t}{t_1} \sqrt{t_1} \bar{c}_{l_1}^{(n)} & , t \in [0, t_1) \\ \frac{1}{t_i - t_{i-1}} \left[ (t_i - t) \sqrt{t_{i-1}} \bar{c}_{l_{i-1}}^{(n)} + (t - t_{i-1}) \sqrt{t_i} \bar{c}_{l_i}^{(n)} \right] & , t \in [t_{i-1}, t_i) \\ \sqrt{t_k} \bar{c}_{l_k}^{(n)} & , t \in [t_k, \infty) \end{cases} \quad (i=2, \dots, k)$$

für  $l=1, \dots, n^k$ ,  $l \longleftrightarrow (l_1, \dots, l_k)$ ,  $\bar{c}_j^{(n)} \in \tilde{I}_j^{(n)}$ .

Literatur:

/1/ Prohorov, Yu.V., Rozanov, Yu.A.: Wahrscheinlichkeitstheorie (russ.), Moskau 1973

- /2/ Lexikon der Stochastik, Berlin 1975
- /3/ Römisch, W., Schulze, R., Sohr, D.: Kennwertmethoden für Volterrasche Integralgleichungen in stochastischen Prozessen, Dissertation A, Humboldt-Universität Berlin, 1976
- /4/ Römisch, W., Schulze, R.: Ein Verfahren zur numerischen Simulation stochastischer Prozesse, Berichte der Tagung "Stochastische Schwingungen und Zuverlässigkeit", Eisenach 1976, ZIMM der AdW, Berlin 1977
- /5/ Friedrich, H.: Simulierung stationärer stochastischer Prozesse mit Hilfe von Hermiteschen Polynomen, ebenda
- /6/ Schulze, R., Römisch, W.: Numerische Methoden für stochastische Differentialgleichungen und stochastische Optimalsteuerungsprobleme, Kongreßberichte der IKM 1978, HAB Weimar
- /7/ Kempe, V.: Theorie stochastischer Systeme, Berlin 1974