Humboldt Universität zu Berlin
Institut für Mathematik
JProf. Dr. A. Schröder

12. November 2007

Numerik partieller Differentialgleichungen I

1. Übung

Aufgabe 1.1

Betrachtet wird die partielle Differentialgleichung

$$\sum_{i=1}^{n} x_i \frac{\partial u}{\partial x_i} = \kappa u$$

mit $\kappa \in \mathbf{R}$. Zeigen Sie:

a) Eine Funktion $u \in C^1(\mathbf{R}^n \backslash \{0\})$ löst die Gleichung genau dann, wenn u positiv homogen vom Grad κ ist (d.h. $u(\lambda x) = \lambda^\kappa u(x)$ für $x \neq 0$ und $\lambda > 0$).

b) Ist $u \in C^1(\mathbf{R}^n)$ eine Lösung der Gleichung und $\kappa = 0$, so ist u konstant. Gilt $\kappa < 0$, so folgt $u \equiv 0$.

Aufgabe 1.2

Für $r > 0$ sei $K_r := \{x \in \mathbf{R}^n \mid x_1^2 + \ldots x_n^2 < r^2\}$. Betrachte wird die partielle Differentialgleichung

$$\sum_{i=1}^{n} a_i(x) \frac{\partial u}{\partial x_i} = -u$$

mit $u \in C^1(K_1)$ und Funktionen $a_i \in C^1(\overline{K_1})$. Zeigen Sie: $u \equiv 0$, falls

$$\forall x \in \partial K_1 : \sum_{i=1}^{n} x_i a_i(x) > 0.$$

Aufgabe 1.3

Es sei $\Delta x := 1/M$ für $M \in \mathbf{N}$ sowie $x_j := j\Delta x$ für $j = 0, \ldots, M$. Zeigen Sie, dass es jeweils eine Konstante gibt, so dass die folgenden Abschätzungen für eine hinreichend glatte Funktion $u : [0,1] \to \mathbf{R}$ gelten:

a) $|u_x(x_j) - \partial^+ u(x_j)| \leq C\Delta x |u|_{C^2([0,1])}$

b) $|u_x(x_j) - \partial^- u(x_j)| \leq C\Delta x |u|_{C^2([0,1])}$

c) $|u_x(x_j) - \hat{\partial} u(x_j)| \leq C\Delta x^2 |u|_{C^3([0,1])}$

d) $|u_{xx}(x_j) - \partial^+\partial^- u(x_j)| \leq C\Delta x^2 |u|_{C^4([0,1])}$

Aufgabe 1.4

Zeigen Sie, dass die Bedingung $0 \leq a\Delta t/\Delta x \leq 1$ in Theorem 1.1 auch notwendig ist.

Abgabe: Mittwoch, den 24.10.07, bis 12:00 Uhr, bei JProf. Dr. Schröder