Humboldt Universität zu Berlin
Institut für Mathematik
JProf. Dr. A. Schröder

20. Dezember 2007

# Numerik partieller Differentialgleichungen I

10. Übung

### Aufgabe 10.1

Auf dem Hilbertraum $V$ mit dem Skalarprodukt $(\cdot,\cdot)$ und der damit induzierten Norm $\|v\| := (v,v)^{1/2}$ sei $a : V \times V \to \mathbf{R}$ eine Bilinearform mit

(i) $\forall v, w \in V:\ a(v,w) \le M\|v\|\|w\|$.

(ii) $\forall v \in V:\ a(v,v) \ge \gamma\|v\|^2$,

wobei $M > 0$ und $\gamma > 0$ ist. Ferner sei $\ell \in V'$. Zeigen Sie:

(a) Es existieren Operatoren $S : V \to V$ und $T_r : V \to V$ mit $r > 0$, so dass für alle $x \in V$ gilt:

$$\begin{aligned} &\forall v \in V:\ a(x,v) = (S(x), v) \\ &\forall v \in V:\ (T_r(x), v) = (x,v) - r(a(x,v) - \langle \ell, v\rangle)). \end{aligned}$$

(b) Für $x \in V$ ist $\|S(x)\| \le M\|x\|$.

(c) $\forall v \in V:\ (T_r(x) - T_r(y), v) = (x - y - rS(x-y), v)$.

(d) Für $r \in (0, 2\gamma/M^2)$ ist $T_r$ eine Kontraktion.

(e) $\dot\exists u \in V:\ \forall v \in V:\ a(u,v) = \langle \ell, v\rangle$.

### Aufgabe 10.2

Wie lautet eine schwache Formulierung der folgenden Randwertaufgabe: $-\Delta u + b_1\partial_x u + b_2\partial_y u + cu = 0$ in $\Omega \subset \mathbf{R}^2$ und $u_{|\partial\Omega} = 0$. Geben Sie hinreichende Bedingungen an, unter denen Aufgabe 10.1 ihre eindeutige Lösbarkeit sichert.

### Aufgabe 10.3

Es sei $r(x,y) := \sqrt{x^2+y^2}$ und $\Omega := \{(x,y) \in \mathbf{R} \mid r(x,y) < 1\}$.

(a) Zeigen Sie, dass die Funktion $w : \Omega \to \mathbf{R}$ mit

$$w(x,y) = \begin{cases} \log\log\frac{e}{r(x,y)}, & r(x,y) > 0 \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

unbeschränkt und unstetig ist, jedoch $w \in H^{1,2}(\Omega)$ gilt.

(b) Es sei

$$J(v) := \frac{1}{2}\int_\Omega \nabla v^\top \nabla v \, dx.$$

sowie

$$u_n(x,y) = \frac{w_n(x,y)}{w_n(0)}, \qquad w_n(x,y) = \begin{cases} w(x,y), & r(x,y) \geq 1/n \\ \log\log en, & 0 \leq r(x,y) < 1/n. \end{cases}$$

Betrachtet wird das Minimierungsproblem

$$\min J(v)$$

unter den Nebenbedingungen

$$v(0) = 1, \quad v = 0 \text{ auf } \partial\Omega.$$

Zeigen Sie, dass $\{u_n\}$ eine Minimalfolge ist. Wie lautet die Lösung des Minimierungsproblems.

**Abgabe:** Mittwoch, den 10.1.08, bis 12:00 Uhr, bei JProf. Dr. Schröder