Humboldt Universität zu Berlin
Institut für Mathematik
JProf. Dr. A. Schröder

8. Januar 2008

Numerik partieller Differentialgleichungen I

11. Übung

Aufgabe 11.1

Es sei Ω ein polyedrisches Gebiet, und es gelte $V \subset H^{1,2}(\Omega)$ für den Hilbertraum V. Betrachtet wird die Variationsgleichung

$$\forall v \in V: \; a(u,v) = \langle \ell, v \rangle$$

mit einer stetigen und V-elliptischen Bilinearform a (Eigenschaften i. und ii. in Satz 4.8) und $\ell \in V^*$. Für eine quasiuniforme Zerlegung der Feinheit $h > 0$ liefern lineare Dreieckselemente Näherungslösungen $u_h \in S_h \subset V$ für die eindeutig bestimmte Lösung $u \in V$. Zeigen Sie:

$$\lim_{h \to 0} \|u - u_h\|_1 = 0.$$

Hinweis: $H^{2,2}(\Omega)$ ist dicht in $H^{1,2}(\Omega)$ enthalten.

Aufgabe 11.2

Es sei $\Omega \subset \mathbf{R}^n$ offen, α ein Multiindex und $v \in L^2(\Omega)$. Dann heißt $w \in L^2(\Omega)$ schwache Ableitung von v, falls

$$\forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega): \; (w, \varphi)_0 = (-1)^{|\alpha|}(v, D^\alpha \varphi)_0.$$

Zeigen Sie:

(a) w ist eindeutig bestimmt. Man schreibt $D^\alpha v := w$.

(b) Besitzt u die schwache Ableitung $v = D^\alpha u \in L^2(\Omega)$ und hat v die schwache Ableitung $w = D^\beta v \in L^2(\Omega)$, so ist $w = D^{\alpha+\beta} u$.

(c) Der Raum $W^{m,2}(\Omega) := \{v \in L^2(\Omega) \mid D^\alpha v \text{ existiert } \forall |\alpha| \leq m\}$ ist bezüglich des Skalarprodukts $(v,w)_{W^{m,2}} := \sum_{|\alpha| \leq m} (D^\alpha v, D^\alpha w)_0$ ein Hilbertraum.

Aufgabe 11.3

Es sei $\Omega \subset \mathbf{R}^2$ ein beschränktes Gebiete mit hinreichend glattem Rand und $v \in C^{m-1}(\overline{\Omega})$ stückweise beliebig oft differenzierbar. Zeigen Sie, dass $v \in H^{m,2}(\Omega)$ ist.
Hinweis: Für beschränkte Gebiete mit hinreichend glattem Rand ist $W^{m,2}(\Omega) = H^{1,2}(\Omega)$ (Adams, Sobolev Spaces, 1975, S.52).

Aufgabe 11.4

Es sei $t \geq 0$. Im Einheitssimplex $E \subset \mathbf{R}^2$ seien auf $t+1$ Linien $N := 1 + 2 + \ldots + (t+1)$ äquidistante Punkte $z_1, \ldots, z_N$ angeordnet, so dass sich auf den Kanten genau $t+1$ Punkte befinden. Zeigen Sie:

(a) Zu jeder Funktion $f \in C(E)$ existiert genau ein Polynom $p \in P_t(E)$, so dass $f(z_i) = p(z_i)$ für $i = 1, \ldots, N$ ist.

(b) Das Paar (Z, D) mit $Z := (z_1, \ldots, z_N)$ und $D = (D^0, \ldots, D^0)$ ist bezüglich $P_t(E)$ unisolvent.

Abgabe: Mittwoch, den 16.1.08, bis 12:00 Uhr, bei JProf. Dr. Schröder