Humboldt Universität zu Berlin
Institut für Mathematik
JProf. Dr. A. Schröder

18. Januar 2008

Numerik partieller Differentialgleichungen I

12. Übung

Aufgabe 12.1

Es sei $E \subset \mathbf{R}^2$ ein Dreieck sowie $e := \{hx \mid x \in E\}$ mit $h \leq 1$. Für $m \geq 1$ und $N := (m+1)(m+2)/2$ seien $z_1, \ldots, z_N \in E$ Punkte, für die der Hermitsche Interpolationsoperator $I : H^{m+1,2}(E) \to \mathcal{P}_m(E)$ bzgl. der Punktauswertung wohldefiniert ist. Ferner sei $|||v||| := |v|_{m+1,2} + \sum_{i=1}^N |v(z_i)|$.
Zeigen Sie, dass eine Konstante $C > 0$ existiert, so dass gilt:

(a) $\forall v \in H^{m+1,2}(E): \ \|v\|_{m+1,2;E} \leq C|||v|||$. (Hinweis: Satz von Rellich)

(b) $\forall v \in H^{m+1,2}(E): \ \|v - I(v)\|_{m+1,2;E} \leq C|v|_{m+1,2;E}$.

(c) $\forall v \in H^{m+1,2}(e): \ \|v - I(v)\|_{k,2;e} \leq Ch^{m-k}|v|_{m+1,2;e}, \quad 0 \leq k \leq m$.

Aufgabe 12.2

Die Menge $E \subset \mathbf{R}^n$ sei abgeschlossen und erfülle die Kegelbedingung. Ferner sei $F : H^{m+1,p}(E) \to \mathbf{R}$, so dass

(a) $\exists c_1 > 0: \ \forall v \in H^{m+1,p}(E): \ |F(v)| \leq c_1\|v\|_{m+1,p;E}$ (d.h. F ist ein beschränkter Operator)

(b) $\exists c_2 > 0: \ \forall v, w \in H^{m+1,p}(E): \ |F(v+w)| \leq c_2(|F(v)| + |F(w)|)$ (d.h. F ist sublinear)

(c) $\forall q \in P_m(E): \ F(q) = 0$.

Zeigen Sie, dass es eine Konstante $c > 0$ gibt, so dass gilt:

$$|F(v)| \leq c|v|_{m+1,p;E}$$

Hinweis: Satz 4.24.

Aufgabe 12.3

Es sei V_h der konforme Finite-Elemente-Raum auf der Basis linearer Dreieckselemente bzgl. einer Triangulierung $\mathcal{T}$ von $\Omega \subset \mathbf{R}^2$ und u_h die Finite-Elemente-Lösung (des Laplace-Problems). Ferner sei $I_h(u) \in V_h$ die Knoteninterpolierende zu $u \in H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$.
Zeigen Sie:

(a) $\exists c_0 > 0: \ \forall v_h \in V_h: \ \|v_h\|_\infty \leq c_0 h^{-1}\|v_h\|_2$

(b) Für $T \in \mathcal{T}$ ist $\|u - I_h u\|_{\infty,T} \leq c_1 h|u|_{2,2}$.
(Hinweis: Sobolewsche Ungleichung und Aufgabe 12.2)

(c) $\exists C > 0 : \ \|u - u_h\|_\infty \leq Ch\|u\|_{2,2}$

Wie lautet die entsprechende Abschätzung für $\Omega \subset \mathbf{R}^3$?

Aufgabe 12.4

Es sei $u^h(x) := \left(|x|^2 + h^4\right)^{1/2}$ für $x \in \Omega \subset \mathbf{R}^2$, wobei $0 \in \Omega$ ist. Ferner sei $\mathcal{T}$ eine Triangulierung von Ω, so dass $B := \{x \in \mathbf{R}^2 \mid \|x\|_2 \leq h\}$ der Inkreis eines Dreiecks $T_0 \in \mathcal{T}$ ist. Die Funktion u_h^h sei die Finite-Elemente-Lösung von u^h auf Ω.
Zeigen Sie:

(a) $u^h \in H^{2,2}(\Omega)$.

(b) Es existiert kein $\epsilon > 0$, so dass für hinreichend kleines h gilt:

$$\|u^h - u_h^h\|_\infty \leq Ch^{1+\epsilon}\|u^h\|_{2,2}$$

Abgabe: Mittwoch, den 23.1.08, bis 12:00 Uhr, bei JProf. Dr. Schröder