Humboldt Universität zu Berlin
Institut für Mathematik
JProf. Dr. A. Schröder

25. Januar 2008

Numerik partieller Differentialgleichungen I

13. Übung

Aufgabe 13.1

Es sei V ein Hilbertraum und $a : V \times V \to \mathbf{R}$ eine stetige Bilinearform sowie $A : V \to V^*$ mit $\langle A(w), v\rangle := a(w, v)$ für $v, w \in V$.
Zeigen Sie, dass genau dann ein $A^{-1} \in L(V', V)$ existiert, wenn gilt:

$$\exists \epsilon > 0 : \inf_{u\in V,\, \|u\|=1} \sup_{v\in V,\, \|v\|=1} |a(u, v)| = \epsilon > 0 \tag{1}$$

$$\exists \epsilon' > 0 : \inf_{v\in V,\, \|v\|=1} \sup_{u\in V,\, \|u\|=1} |a(u, v)| = \epsilon' > 0. \tag{2}$$

Hinweis: Verwenden Sie eine Folgerung aus dem "Satz von der offenen Abbildung": Für die Banachräume X, Y sei $T \in L(X, Y) := \{B : X \to Y \mid B \text{ linear und stetig}\}$ bijektiv. Dann gilt $T^{-1} \in L(Y, X)$.

Aufgabe 13.2

Es sei V ein Hilbertraum. Eine Bilinearform $a : V \times V \to \mathbf{R}$ heißt stetig, falls

$$\exists C_S > 0 : \ \forall x, y \in V : \ a(x, y) \leq C_S\|x\| \, \|y\|,$$

und V-elliptisch, falls sie auf $V \times V$ stetig ist und

$$\exists C_E : \ \forall x \in V : \ a(x, x) \geq C_E\|x\|^2.$$

Zeigen Sie:

(a) Es sei a eine stetige Bilinearform, so dass (1) und (2) erfüllt sind. Der Operator A sei wie in Aufgabe 13.1. Dann gilt

$$\|A'\| = \|A\| \leq C_S$$
$$\|A'^{-1}\| = \|A^{-1}\| \leq 1/\epsilon$$

(b) V-Elliptizität impliziert (1) und (2).

(c) Ist $W \subset V$ ein Hilbert-Unterraum mit äquivalenter Norm, so ist eine V-elliptische Bilinearform auch W-elliptisch.

(d) Es sei $a : V \times V \to \mathbf{R}$ eine stetige Bilinearform. Ferner sei V_0 dicht in V und $a(x, x) \geq C_E\|x\|^2$ für alle $x \in V_0$. Dann ist a V-elliptisch.

(e) Es sei $a : V \times V \to \mathbf{R}$ eine stetige, symmetrische und nichtnegative ($a(x, x) \geq 0$) Bilinearform, die (1) und (2) erfüllt. Dann ist a V-elliptisch.

Aufgabe 13.3
Betrachte wird die Randwertaufgabe

$$\begin{aligned} -\Delta u - 25u &= f \text{ in } \Omega \\ u &= 0 \text{ auf } \partial\Omega \end{aligned} \tag{3}$$

Dabei gilt $\Omega := (0,1)^2$.

(a) Geben Sie eine schwache Formulierung an.

(b) Es ist bekannt, dass $\int_\Omega \|\nabla v\|^2 \, d \geq 2\pi^2 \int_\Omega |v|^2 \, dx$ für $v \in H_0^{1,2}(\Omega)$. Für $v = \sin(\pi x) \cdot \sin(\pi y)$ gilt sogar die Gleichheit. Schließen Sie daraus, dass die Bilinearform zu Problem (3) nicht $H_0^{1,2}(\Omega)$-elliptisch ist.

(c) Zeigen Sie:

$$\exists \beta > 0 : \forall v \in H_0^{1,2}(\Omega) : \ \beta \|v\|_{1,2} \leq \sup_{w \in H_0^{1,2}(\Omega) \setminus \{0\}} \frac{a(v,w)}{\|w\|_{1,2}}$$

Was folgt daraus für die eindeutige Lösbarkeit des Problems (3)?

Aufgabe 13.4
Es gelten die Voraussetzungen von Aufgabe 13.1. Zudem seien $V_i \subset V$ Teilräume mit $i \in \mathbf{N}$ und $\dim V_i < \infty$ sowie $A_i : V_i \to V_i^*$ mit $\langle A_i(\cdot), v \rangle := a(\cdot, v)$ für $v \in V_i$, und es gelte

(i) $\exists \epsilon > 0 : \forall i \in \mathbf{N} : \ \inf_{u \in V_i, \, \|u\|=1} \sup_{v \in V_i, \, \|v\|=1} |a(u,v)| = \epsilon > 0$.

(ii) $\forall v \in V : \ \lim_{i \to \infty} \inf_{w \in V_i} \|v - w\| = 0$.

Zeigen Sie:

(a) Für alle $i \in \mathbf{N}$ existiert $A_i^{-1} \in L(V_i^*, V_i)$.

(b) Mit der Stetigkeitskonstante $\nu_0 > 0$ gilt:

$$\forall \ell \in \mathrm{rg}(A) := \{A(v) \mid v \in V\}, \forall u \in A^{-1}(\ell) : \ \|u - A_i^{-1}(\ell)\| \leq (1 + \nu_0/\epsilon) \inf_{w \in V_i} \|u - w\|.$$

(c) Für alle $\ell \in \mathrm{rg}(A)$ existiert genau ein $u \in V$, so dass $A(u) = \ell$ ist, und es gilt

$$\lim_{i \to \infty} \|u - u_i\| = 0$$

(d) $\mathrm{rg}(A)$ ist abgeschlossen in V^*.

(e) $\mathrm{rg}(A) = V^*$

Geben Sie ein Beispiel für die Teilräume V_i an, so dass ii. erfüllt ist.

Abgabe: Mittwoch, den 30.1.08, bis 12:00 Uhr, bei JProf. Dr. Schröder