Humboldt Universität zu Berlin
Institut für Mathematik
JProf. Dr. A. Schröder

1. Februar 2008

Numerik partieller Differentialgleichungen I

14. Übung

Aufgabe 14.1

Es sei $\Omega \subset \mathbf{R}^2$ und $a : H_0^{1,2}(\Omega) \times H_0^{1,2}(\Omega) \to \mathbf{R}$ eine stetige und $H_0^{1,2}(\Omega)$-elliptische Bilinearform mit

$$a(v,w) := \int_\Omega \sum_{i,j=1}^{2} a_{ij} D_i v \, D_j w \, dx$$

und $a_{ij} \in C(\Omega)$. Ferner sei S_h^D ein Finite-Elemente-Raum mit der Maschenweite h und $f \in C(\Omega)$. Betrachtet wird die FE-Approximationsaufgabe: Gesucht ist ein $u_h \in S_h^D$, so dass gilt:

$$\forall v_h \in S_h^D : \; a(u_h, v_h) = (f, v_h)_0.$$

Es sei $\tilde{a} : S_h^D \times S_h^D \to \mathbf{R}$ eine weitere Bilinearform und $\tilde{\ell} \in (S_h^D)^*$. Ferner sei $\tilde{u}_h \in S_h^D$ die eindeutig bestimmte Lösung der Ersatzaufgabe

$$\forall v_h \in S_h^D : \; \tilde{a}(\tilde{u}_h, v_h) = \langle \tilde{\ell}, v_h \rangle.$$

Zeigen Sie, dass aus

$$|(a - \tilde{a})(u_h, v_h)| + |(f, v_h)_0 - \langle \tilde{\ell}, v_h \rangle| \le c h^\tau \|v_h\|_{1,2}$$

und

$$\|v_h\|_{1,2} \le \gamma \tilde{a}(v_h, v_h)$$

mit von h unabhängigen Konstanten c und γ folgt:

$$\|u_h - \tilde{u}_h\|_{1,2} \le c\gamma h^\tau.$$

Aufgabe 14.2

Es sei $\mathcal{T}_h$ die zum Finite-Elemente-Raum S_h^D aus Aufgabe 14.1 gehörende Zerlegung. Auf jedem Dreieck $T \in \mathcal{T}_h$ werden polynomiale Interpolierende $\tilde{a}_{ij}, \tilde{f} \in P_{r-1}(T)$ mit $r > 0$ zu a und f gebildet, so dass $\|a_{ij} - \tilde{a}_{ij}\|_\infty + \|f - \tilde{f}\|_\infty = \mathcal{O}(h^r)$ gilt. Die gestörte Bilinearform $\tilde{a}$ mit

$$\tilde{a}(v_h, w_h) := \int_\Omega \sum_{i,j=1}^{2} \tilde{a}_{ij} D_i v_h \, D_j w_h \, dx.$$

und die gestörte Linearform $\tilde{\ell}$ mit

$$\langle \tilde{\ell}, v_h \rangle := \int_\Omega \tilde{f} v_h \, dx$$

können exakt berechnet werden.
Wie muss r zur Erlangung der optimalen Konvergenzordnung gewählt werden?
Hinweis: Verwenden Sie Aufgabe 14.1.

Aufgabe 14.3

Zeigen Sie Satz 4.39 aus der Vorlesung.

Abgabe: Mittwoch, den 6.2.08, bis 12:00 Uhr, bei JProf. Dr. Schröder