Humboldt Universität zu Berlin
Institut für Mathematik
JProf. Dr. A. Schröder

8. Februar 2008

Numerik partieller Differentialgleichungen I

15. Übung

Aufgabe 15.1

Zeigen Sie Satz 5.2 aus der Vorlesung.

Aufgabe 15.2

Zeigen Sie Satz 5.3 für $\Gamma_N = \emptyset$ mit Hilfe der Techniken für dual gewichtete Fehlerschätzer.

Aufgabe 15.3

Es sei $\mathcal{T}_h$ eine Zerlegung von $\Omega \subset \mathbf{R}^2$ und $T_0 \in \mathcal{T}_h$ sowie $\rho_0 \in C_0^\infty(T_0)$. Betrachtet wird die schwache Formulierung aus Abschnitt 5 aus der Vorlesung mit $f := -\Delta\rho_0$ und $\Gamma_N = \emptyset$ sowie $\tilde{\eta}_{R,T}$ aus Satz 5.4. Zeigen Sie, dass $\tilde{\eta}_{R,T} = 0$ für alle $T \in \mathcal{T}_h$ ist. Wie ist das Ergebnis zu interpretieren?

Aufgabe 15.4

Betrachtet wird die eindimensionale Randwertaufgabe

$$-u'' = g, \quad u(0) = u(1) = 0.$$

Es sei u_h die Lösung des diskreten Problems unter Verwendung linearer Finiten Elemente. Den Basisfunktionen seien die Knoten x_i zugeordnet. Ferner seien $y_{2i+1} := (x_i + x_{i+1})/2$ und $y_{2i} := x_i$. Mit den zu y_i gehörenden Basisfunktionen ψ_i sei

$$\eta^2 := \sum_{i=0}^{2m} \eta_i, \quad \eta_i := \sup_{v \in H_0^1(0,1)} \frac{(u - u_h, \psi v)_1}{|\psi_i v|_1}$$

mit $(v, w)_1 := (v', w')_0$ und $|v|_1 := (v, v)_1^{1/2}$.
Zeigen Sie:

(a) $\exists C > 0 : \ |u - u_h|_{1,2} \leq C\eta$

(b)

$$\eta_i^2 = \int_{y_{i-1}}^{y_i} ((z - u_h)')^2 \, dx,$$

wobei z die lokale Randwertaufgabe

$$-z'' = g, \ z(y_{i-1}) = u_h(y_{i-1}), \ z(y_i) = u_h(y_i)$$

löst.

Was ist aus praktischer Sicht zu tun, um aus (b) einen berechenbaren a posteriori Fehlerschätzer herzuleiten?

Abgabe: Mittwoch, den 13.2.08, bis 12:00 Uhr, bei JProf. Dr. Schröder