Humboldt Universität zu Berlin
Institut für Mathematik
JProf. Dr. A. Schröder

12. November 2007

Numerik partieller Differentialgleichungen I

2. Übung

Aufgabe 2.1
Betrachtet wird die lineare Differentialgleichung zweiter Ordnung

$$Lv := \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} v_{x_i,x_j} + \sum_{j=1}^{n} b_j v_{x_j} + c(x)v$$

mit $A = (a_{ij}) \in \mathbf{R}^{n\times n}$ und $b = (b_j) \in \mathbf{R}^n$. Die Matrix A besitze π positive und ν negative Eigenwerte. Zeigen Sie, dass es eine Transformation T der Form

$$u(x) = Tv(x) = e^{\delta^\top \varphi x} v(\varphi x), \qquad v(y) = T^{-1}u(y) = e^{-\delta\varphi^{-1}y} u(\varphi^{-1}y)$$

mit $\delta \in \mathbf{R}^n$ und einer invertierbaren Matrix $\varphi \in \mathbf{R}^{n\times n}$ gibt, so dass der Operator $\tilde{L}v := T^{-1}L(Tv)$ die Gestalt

$$\tilde{L}v = \sum_{i=1}^{\pi} v_{y_i,y_i} - \sum_{i=\pi+1}^{\pi+\nu} v_{y_i,y_i} + \sum_{i=1}^{n} \beta_i v_{y_i} + \gamma(y)v$$

mit $\beta_1 = \ldots = \beta_{\pi+\nu} = 0$ und $\beta_i \in \{0,1\}$ für $i > \pi + \nu$ besitzt.

Aufgabe 2.2
Die Eigenfunktionen und Eigenwerte der Randwertaufgabe

$$-v_{xx} = \lambda v \quad \text{in } (0,1)\,, \qquad v_x(0) = v_x(1) = 0\,,$$

lauten

$$\begin{aligned} v_0 &= 1\,, & \lambda_0 &= 0\,, \\ v_i &= \cos(i\pi x)\,, & \lambda_i &= i^2\pi^2\,, \quad i > 0\,. \end{aligned}$$

a) Geben Sie zu den Eigenfunktionen v_i die Lösung der Anfangsrandwertaufgabe

$$\begin{aligned} u_t - u_{xx} &= 0 && \text{in } (0,1)\times(0,T)\,, \\ u_x(0,t) = u_x(1,t) &= 0\,, && t \in (0,T]\,, \\ u(x,0) &= v_i(x)\,, && x \in (0,1)\,, \end{aligned}$$

an. Ansatz: Separation der Variablen $u(x,t) = \psi(t)v_i(x)$.

b) Bestimmen Sie die Lösung zur Anfangswertvorgabe

$$u(x,0) = \begin{cases} 0\,, & \text{für } x \leq 1/2\ , \\ 1\,, & \text{für } x > 1/2\ , \end{cases}$$

durch Überlagerung der Lösungen aus Teil a) (Fourierentwicklung).

c) Gegen welche Funktion konvergiert die Lösung für $t \to \infty$?

Aufgabe 2.3
Die Funktion u erfülle die Anfangsrandwertaufgabe

$$\begin{aligned} u_t - u_{xx} &= 0 && \text{in } (0,1) \times (0,T) \\ u(x,0) &= u_0(x) && x \in (0,1) \\ u(0,t) = u(1,t) &= 0 && t \in (0,T). \end{aligned}$$

a) Zeigen Sie mit Hilfe des Maximumprinzips die Eindeutigkeit und Stabilität der Lösung u.

b) Zeigen Sie:

$$\forall t \in [0,T]: \int_0^1 u(x,t)^2\,dx \leq \int_0^1 u_0(x)^2\,dx.$$

Gilt diese Aussage auch für die Randvorgabe $u_x(0,t) = u_x(1,t) = 0$?
Zeigen Sie mit dieser Aussage die Eindeutigkeit der Lösung.

Aufgabe 2.4
Zeigen Sie, dass das Problem

$$u_{xx} - u_t = f(x,t), \qquad u(x,0) = \varphi(x)$$

höchstens eine Lösung u in $\mathbf{R}^n \times [0,T]$besitzt, die einer Abschätzung der Form

$$|u(x,t)| \leq a \exp(b|x|)$$

mit $a, b > 0$ genügt.
Hinweis: Zeigen Sie, dass $w(x,t) := (2T-t)^{-1/2} \exp(x^2/(8T-4t))$ die Gleichung $u_{xx} - u_t = 0$ erfüllt. Was folgt dann aus dem Maximumprinzip für $u - \epsilon w$ mit beliebigem $\epsilon > 0$ und genügend großem $R = R(\epsilon)$ auf $]-R,R[\times[0,T]$?

Abgabe: Mittwoch, den 31.10.07, bis 12:00 Uhr, bei JProf. Dr. Schröder