Humboldt Universität zu Berlin
Institut für Mathematik
JProf. Dr. A. Schröder

12. November 2007

Numerik partieller Differentialgleichungen I

3. Übung

Aufgabe 3.1

Es sei $u \in C^4([0,1] \times [0,T])$ Lösung der Anfangsrandwertaufgabe zur Wärmeleitungsgleichung. Zeigen Sie, dass für die Iterierten des Rückwärts-Euler-Verfahrens U_j^n gilt:

$$\forall n \geq 0 : \sup_{j=0,\ldots,M} |u(x_j, t_n) - U_j^n| \leq C t_n (\Delta t + \Delta x^2)(|u_{xxxx}|_{C([0,1]\times[0,T])} + |u_{tt}|_{C([0,1]\times[0,T])}).$$

Aufgabe 3.2

Betrachtet wird das Anfangswertproblem

$$\begin{aligned} &u_{tt} = u_{xx} \quad \text{in } \mathbf{R} \times \mathbf{R}_{>0}, \\ &u(x,0) = u_0(x),\ u_t(x,0) = v_0(x) \quad \text{für } x \in \mathbf{R} \end{aligned}$$

mit hinreichend glatten Funktionen u_0 und v_0.

a) Zeigen Sie, dass die Funktion (Lösungsformel nach d'Alembert)

$$u(x,t) = \frac{1}{2}(u_0(x+t) + u_0(x-t)) + \frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t} v_0(s)\, ds$$

eine Lösung des Anfangswertproblems ist.

b) Welche Lösung erhält man für die Randvorgabe $u_0(x) = 0$ und $v_0(x) = \cos(x)$? Was folgt daraus für die Gültigkeit eines Maximumprinzips?

Aufgabe 3.3

Zeigen Sie mit Hilfe von Theorem 2.8., dass die Lösung des Anfangsrandwertproblems zur Wellengleichung eindeutig ist.

Aufgabe 3.4

Lösen Sie das Anfangsrandwertproblem

$$\begin{aligned} &u_{xx} - u_{tt} = 0 \quad \text{für } 0 \leq x \leq \pi,\ t \geq 0 \\ &u(x,0) = 0,\ u_t(x,0) = x(\pi - x) \\ &u(0,t) = u(\pi,t) = 0 \end{aligned}$$

mit Hilfe eines Separationsansatzes.

Abgabe: Mittwoch, den 7.11.07, bis 12:00 Uhr, bei JProf. Dr. Schröder