Humboldt Universität zu Berlin
Institut für Mathematik
JProf. Dr. A. Schröder

12. November 2007

Numerik partieller Differentialgleichungen I

4. Übung

Aufgabe 4.1

Zeigen Sie, dass der Laplace-Operator in 2 Dimensionen bezüglich der Polarkoordinaten die folgende Gestalt hat:

$$\Delta = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}$$

Hinweis: Verwenden Sie die Polarkoordinaten:

$$x = r\cos(\varphi), \quad y = r\sin(\varphi).$$

Aufgabe 4.2

Zeigen Sie, dass die Singularitätenfunktion für $n = 2$ die Potentialgleichung in $\mathbf{R}^n \backslash \{y\}$ löst.
Hinweis: Verwenden Sie Aufgabe 1.

Aufgabe 4.3

Es sei $u, v \in C^2(\overline{\Omega})$ und Ω ein Normalgebiet.

a) Zeigen Sie die zweite Greensche Formel

$$\int_\Omega u\Delta v\,dx = \int_\Omega v\Delta u\,dx + \int_{\partial\Omega}\left(u\frac{\partial v}{\partial n} - v\frac{\partial u}{\partial n}\right)d\Gamma.$$

b) Zeigen Sie: Ist u harmonisch, gilt:

$$\int_{\partial\Omega}\frac{\partial u}{\partial n}\,d\Gamma = 0.$$

Aufgabe 4.4

Zeigen Sie:

a) Eine Funktion $u \in C^0(\overline{\Omega})$ besitzt genau dann die Mittelwerteigenschaft, wenn gilt:

$$\forall x \in \Omega,\ \forall R > 0 : u(y) = \frac{n}{R^n\omega_n}\int_{K_R(y)} u(x)\,dx.$$

b) Eine Funktion ist genau dann in Ω harmonisch, wenn Sie dort die Mittelwerteigenschaft besitzt.

c) Für eine Folge harmonischer Funktionen, die in $\overline{\Omega}$ gleichmäßig konvergieren, ist die Grenzfunktion harmonisch in Ω.

Hinweis zu ii: Verwenden Sie Aufgabe 3 und die Poissonsche Integralformel (ohne diese nachzuweisen): Für $\varphi \in C^0(\partial K_R(z))$ und $n \geq 0$ ist die Lösung der Randwertaufgabe $\Delta u = 0$ in $K_R(z)$ und $u = \varphi$ auf $\partial K_R(z)$ gegeben durch

$$u(y) = \frac{R^2 - |y - z|^2}{R\omega_n} \int_{\partial K_R(z)} \frac{\varphi(x)}{|y - x|^n} \, d\Gamma_x.$$

Abgabe: Mittwoch, den 14.11.07, bis 12:00 Uhr, bei JProf. Dr. Schröder