Humboldt Universität zu Berlin
Institut für Mathematik
JProf. Dr. A. Schröder

8. November 2007

Numerik partieller Differentialgleichungen I

5. Übung

Aufgabe 5.1

Es sei A eine diagonaldominante oder irreduzibel diagonaldominante Matrix. Zeigen Sie, dass $\rho(D_A^{-1}B_A) < 1$ ist.

Aufgabe 5.2

Es sei A eine Matrix. Zeigen Sie, dass die Implikation

$$Ax \leq Ay \quad \Rightarrow x \leq y \tag{1}$$

genau dann gilt, wenn A^{-1} existiert und $A^{-1} \geq 0$ gilt.
Eine Matrix, die (1) erfüllt, heißt invers monoton.

Aufgabe 5.3

Es sei A eine Matrix mit $A(\alpha, \beta) \leq 0$ für $\alpha \neq \beta$.
Zeigen Sie:

a) A ist genau dann invers monoton, wenn es ein $e : \mathcal{I} \to \mathbf{R}_+$ mit $Ae > 0$ gibt.
Hinweis: Zeigen Sie für die Rückrichtung, dass $A(\alpha, \alpha) > 0$ und $\|P\|_e < 1$ ist. Hierbei ist $P := \operatorname{diag}(A)^{-1}(\operatorname{diag}(A) - A)$ und $\|\cdot\|_e$ die der Norm $\|u\|_e := \max_{\alpha \in \mathcal{I}} |u(\alpha)|/e(\alpha)$ zugeordnete Matrixnorm. Zeigen Sie dann, dass $(I-P)^{-1}$ existiert, und dass $(-P)^{-1} = \sum_{j=0}^{\infty} P^j$ ist.

b) Existiert $e > 0$ mit $Ae > 0$, so gilt

$$\|A^{-1}\|_\infty \leq \frac{\|e\|_\infty}{\min_{\alpha \in \mathcal{I}}(Ae)(\alpha)}.$$

Aufgabe 5.4

Es sei A eine M-Matrix, und es gebe ein w mit $Aw \geq 1$. Zeigen Sie, dass $\|A^{-1}\|_\infty \leq \|w\|_\infty$ gilt.

Abgabe: Mittwoch, den 14.11.07, bis 12:00 Uhr, bei JProf. Dr. Schröder