Humboldt Universität zu Berlin
Institut für Mathematik
JProf. Dr. A. Schröder

23. November 2007

Numerik partieller Differentialgleichungen I

6. Übung

Aufgabe 6.1

Welche Form nimmt die zur Fünfpunktformel definierte Matrix L_h bei lexikografischer Nummerierung an?

Aufgabe 6.2

Es sei L_h die zur Fünfpunktformel definierte Matrix. Zeigen Sie:

a) Die $(n-1)^2$ Eigenvektoren von L_h sind durch $u^{\nu\mu} : \Omega_h \to \mathbf{R}$, $1 \leq nu, \mu \leq n$ mit

$$u^{\nu\mu}(x, y := sin(\nu\pi x)\sin(\mu\pi y)$$

gegeben. Die zugehörigen Eigenvektoren sind

$$\lambda_{\nu\mu} = 4h^{-2}(sin^2(\nu\pi h/2) + sin^2(\mu\pi h/2)).$$

b) $\|L_h\|_2 \leq 8h^{-2}\cos^2(\pi h/2) \leq 8h^{-2}$

c) $\|L_h^{-1}\| \leq 1/8h^2\sin^{-2}(\pi h/2) \leq 1/16$

Aufgabe 6.3

Es sei $0 = x_0 < x_1 < \ldots < x_{N-1} < x_N = 1$ und $h_{i+1} := x_{i+1} - x_i$ sowie $h := \max h_i$. Betrachten Sie die eindimensionale Randwertaufgabe

$$-u''(x) = f(x) \text{ mit } u(0) = u(1) = 0.$$

a) Zeigen Sie, dass die Diskretisierung

$$\frac{2}{h_k + h_{k+1}} \left(\frac{u_k - u_{k+1}}{h_{k+1}} + \frac{u_k - u_{k-1}}{h_k} \right) = f_k, \quad u_0 = u_N = 0 \tag{1}$$

einen Konsistenzfehler der Ordnung $\mathcal{O}(h)$ besitzt, sofern $u \in C^4[0,1]$ vorausgesetzt wird. Wie groß ist der Konsistenzfehler auf einem äquidistanten Gitter? Welche Konvergenzordnung ist jeweils zu erwarten?

b) Es sei u_k Lösung der Diskretisierung (1). Ferner sei

$$G(x,t) := \begin{cases} (1-x)t, & t \leq x \\ x(1-t), & x \leq t. \end{cases}$$

Zeigen Sie, dass

$$u_k = \frac{1}{2} \sum_{l=0}^{N-1} h_{l+1}(G(x_k, x_l)f_l + G(x_k, x_{l+1})f_{l+1})$$

gilt.

c) Es sei u_k Lösung der Diskretisierung (1) und $u \in C^4[0,1]$. Zeigen Sie, dass mit einer Konstanten $C > 0$ gilt:

$$|u(x_k) - u_k| \leq Ch^2.$$

Aufgabe 6.4

Gegeben sei die Neunpunktformel

$$D_h := -\frac{h^{-2}}{6}\begin{bmatrix} -1 & -4 & -1 \\ -4 & 20 & -4 \\ -1 & -4 & -1 \end{bmatrix}$$

zur Poisson-Gleichung

$$-\Delta u = f \text{ in } \Omega, \qquad u = \varphi \text{ auf } \partial\Omega$$

mit einer Lösung $u \in C^6(\overline{\Omega})$. Geben Sie die Matrix L_h des zugehörigen Gleichungssystems an. Zeigen Sie:

(a) L_h ist eine M-Matrix.

(b) $\|L_h^{-1}\|_\infty \leq 1/8$ und $\|L_h\| \leq 20h^{-2}/3$. (Hinweis: Verwenden Sie für die Stabilitätsabschätzung die Hilfsfunktion $w(x,y) = x(1-x)/2$.)

(c) Es sei $\bar{R}_h u$ die Beschränkung von u auf die Gitterpunkte und

$$\tilde{R}_h f := \frac{1}{6}\begin{bmatrix} & 1/2 & \\ 1/2 & 4 & 1/2 \\ & 1/2 & \end{bmatrix} f.$$

Zeigen Sie:

$$\|D_h \bar{R}_h u - \tilde{R}_h \Delta u\|_\infty \leq \frac{11h^4}{180}\|u\|_{C^6(\overline{\Omega})}.$$

(d) Zeigen Sie:

$$\|u_h - \bar{R}_h u\|_\infty \leq \frac{11h^4}{1440}\|u\|_{C^6(\overline{\Omega})}.$$

Welche Konsistenz- bzw. Konvergenzordnung erreicht man im Fall $f = 0$?

Abgabe: Mittwoch, den 28.11.07, bis 12:00 Uhr, bei JProf. Dr. Schröder