Humboldt Universität zu Berlin
Institut für Mathematik
JProf. Dr. A. Schröder

4. Dezember 2007

Numerik partieller Differentialgleichungen I

7. Übung

Aufgabe 7.1

Es sei $0 < \omega < 2\pi$ und $\Omega_\omega := \{(r\cos(\varphi), r\sin(\varphi)) \in \mathbf{R}^2 \mid 0 < r < 1,\ 0 < \varphi < \omega\}$. Ferner sei $u_{\omega,n} : \Omega_\omega \to \mathbf{R}$ mit $u_{\omega,n}(r,\varphi) := r^{n\pi/\omega}\sin(n\pi/\omega\,\varphi)$, $n \in \mathbf{N}$.

a) Zeigen Sie, dass die Funktionen $u_{\omega,n}$ harmonisch sind.

b) Für welche Werte ω gilt $u_{\omega,n} \notin C^1(\overline{\Omega}_\omega)$?

Aufgabe 7.2

Es sei $Lu := -\sum_{i,k=1}^{d} a_{ik}(x)u_{x_i,x_k}$ ein elliptischer Differentialoperator auf dem beschränkten Gebiet $\Omega \subset \mathbf{R}^d$. Zeigen Sie für $u, v \in C^2(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})$:

a) Gilt $Lu \leq 0$, dann nimmt u sein Maximum auf $\partial\Omega$ an.
Hinweis: Zeigen Sie zunächst die Behauptung für $Lu < 0$ und betrachten Sie dann Lw mit $w(x) := u(x) + \delta\|x - \bar{x}\|_2^2$ unter der Annahme $\bar{x} \in \Omega$ und $u(\bar{x}) > \sup_{x\in\partial\Omega} u(x)$.

b) Gilt $Lu \geq 0$, dann nimmt u sein Minimum auf $\partial\Omega$ an.

c) Aus $Lu \leq Lv$ in Ω und $u \leq v$ auf $\partial\Omega$ folgt $u \leq v$ in Ω.

d) Aus $Lu = Lv$ folgt $\sup_{x\in\Omega} |u(x) - v(x)| \leq \sup_{z\in\partial\Omega} |u(z) - v(z)|$.

e) Es sei L gleichmäßig elliptisch. Dann existiert ein $c > 0$, so dass gilt:

$$\forall u \in C^2(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega}) :\ |u(x)| \leq \sup_{z\in\partial\Omega} |u(z)| + c\sup_{z\in\Omega} |Lu(z)|.$$

Hinweis: Betrachten Sie Lv mit $v(x) := \sup_{z\in\partial\Omega} |u(z)| + (R^2 - \|x\|_2^2)\cdot 1/2\alpha \sup_{z\in\Omega} |Lu(z)|$. Hierbei ist $\alpha > 0$ die Elliptizitätskonstante und $R > 0$ mit $\Omega \subset B_R(0)$.

Aufgabe 7.3

Es sei $u \in C^2(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})$ und $\Omega \subset \mathbf{R}^d$ beschränkt. Ferner sei $Lu := -\sum_{i,k=1}^{d} a_{ik}(x)u_{x_i,x_k} + c(x)u$ ein elliptischer Differentialoperator mit $c(x) \geq 0$. Zeigen Sie, dass aus $Lu \leq 0$

$$\sup_{x\in\overline{\Omega}} u(x) \leq \max\{0, \max_{x\in\partial\Omega} u(x)\}$$

folgt.

Aufgabe 7.4

Zeigen Sie, dass $H^{1,2}(\Omega)$ vollständig ist.

Abgabe: Mittwoch, den 5.12.07, bis 12:00 Uhr, bei JProf. Dr. Schröder