Humboldt Universität zu Berlin
Institut für Mathematik
JProf. Dr. A. Schröder

6. Dezember 2007

Numerik partieller Differentialgleichungen I

8. Übung

Aufgabe 8.1

Es sei $\Omega \subset \mathbf{R}^n$ ein Normalgebiet.

a) Es sei $x_0 \in \Omega$ und $B_r(x_0) \subset \Omega$ mit $r > 0$. Zeigen Sie, dass die Funktion $h : \Omega \to \mathbf{R}$ mit

$$h(x) := \begin{cases} 0, & \|x - x_0\|_2 \geq r \\ \exp\left(\frac{\|x-x_0\|_2^2}{\|x-x_0\|_2^2 - r^2}\right), & \|x - x_0\|_2 < r \end{cases}$$

in $C_0^\infty(\Omega)$ enthalten ist.

b) Es sei $u \in C^0(\overline{\Omega})$. Zeigen Sie:

$$\forall v \in C_0^\infty(\Omega) : \int_\Omega uv\, dx = 0 \quad \Rightarrow \quad u = 0.$$

c) Es sei $u \in C^{2,2}(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})$ und $Au := \sum_{i,j=1}^n D_i(a_{ij} D_j u) + cu$ mit $a_{ij} = a_{ji} \in C^1(\overline{\Omega})$ und $c \in C^0(\overline{\Omega})$. Ferner sei $f \in C^0(\Omega)$. Zeigen Sie:

$$\forall v \in C_0^\infty(\Omega) : \int_\Omega \left(\sum_{i,j=1}^n a_{ij} D_j u D_i v + cuv \right) dx = f \quad \Rightarrow \quad Au = f.$$

Aufgabe 8.2

Es sei $\Omega := \{x \in \mathbf{R}^3 \mid \|x\|_2 < 1\}$ und $u(x) := \ln \|x\|_2$ für $x \in \Omega$. Zeigen Sie:

a) $u \in L^2(\Omega)$, aber $u \notin C^0(\Omega)$.

b) $u \in H^{1,2}(\Omega)$.

Aufgabe 8.3

Es sei $\Omega = [a, b]$ ein reelles Intervall. Zeigen Sie, dass $H^{1,2}(\Omega) \subset C(\Omega)$ ist (Hinweis: Satz von Arcelà-Ascoli).

Aufgabe 8.4

Es sei $\Omega \subset \mathbf{R}^n$ ein beschränktes Gebiet mit $0 \in \Omega$ und $u(x) = \|x\|_2^\sigma$. Für welche Werte von $\sigma \in \mathbf{R}$ ist $u \in H^{1,2}(\Omega)$.

Abgabe: Mittwoch, den 12.12.07, bis 12:00 Uhr, bei JProf. Dr. Schröder