Humboldt Universität zu Berlin
Institut für Mathematik
JProf. Dr. A. Schröder

13. Dezember 2007

Numerik partieller Differentialgleichungen I

9. Übung

Aufgabe 9.1

Beweisen Sie die Poincarésche Ungleichung für $v \in H^1(\Omega, \Gamma_0) := \{v \in H^1(\Omega) \mid v_{|\Gamma_0} = 0\}$, wobei $\Omega := (0,1)^2$ das Einheitsquadrat und $\Gamma_0 := (0, 0.5) \times \{0\} \subset \partial\Omega$ ist.

Aufgabe 9.2

Wie lautet eine variationelle (schwache) Formulierung der folgenden Randwertaufgabe: $-\Delta u = 0$ in Ω und $u_{|\Gamma_0} = 0$, $\partial_n u_{|\Gamma_1} = h_1$, $(\partial_n u + \sigma u)_{|\Gamma_2} = h_2$, wobei $\partial\Omega = \overline{\Gamma}_0 \cup \overline{\Gamma}_1 \cup \overline{\Gamma}_2$ und $\Gamma_i \cap \Gamma_j = \emptyset$ $(i \neq j)$. Geben Sie hinreichende Bedingungen an, unter denen der Satz von Lax-Milgram ihre eindeutige Lösbarkeit sichert.

Aufgabe 9.3

Es sei V ein Hilbertraum und $K \subset V$ eine konvexe und abgeschlossene Menge. Ferner sei $\ell \in V'$ und $a : V \times V \to \mathbf{R}$ eine stetige Bilinearform mit

$$\exists \nu > 0 : \ \forall v \in V \backslash \{0\} : a(v,v) \geq \nu \|v\|^2.$$

(a) Zeigen Sie, dass das Funktional

$$J(v) := \frac{1}{2} a(v,v) - \langle \ell, v \rangle$$

nach unten beschränkt ist.

(b) Eine Folge $\{v_n\} \subset K$ heißt Minimalfolge, falls gilt:

$$\lim_{n \to \infty} J(v_n) = \inf_{v \in K} J(v).$$

Zeigen Sie, dass jede Minimalfolge eine Cauchy-Folge ist.

(c) Zeigen Sie, dass genau ein $u \in K$ existiert, so dass gilt:

$$J(u) = \inf_{v \in K} J(v). \tag{1}$$

(d) Zeigen Sie, dass $u \in K$ genau dann (1) erfüllt, falls

$$\forall v \in K : \ a(u, v-u) \geq \langle \ell, v-u \rangle$$

gilt. Was gilt im Fall, dass K ein Unterraum von V ist?

Aufgabe 9.4
Es sei $\Omega \subset \mathbf{R}^n$ ein Gebiet. Geben Sie eine schwache Formulierung der Randwertaufgabe

$$\begin{aligned} &-\Delta u + au = f \text{ in } \Omega \\ &u \geq 0,\ \partial_n u \geq 0,\ u\partial_n u = 0 \text{ auf } \partial\Omega \end{aligned}$$

mit $f \in L^2(\Omega)$ und $a \geq 0$ an. Existiert eine eindeutige Lösung der schwachen Formulierung?

Abgabe: Mittwoch, den 19.12.07, bis 12:00 Uhr, bei JProf. Dr. Schröder