

Numerik partieller Differentialgleichungen I - Praktikum

6. Projekt

Aufgabe 6.1

Implementieren Sie das CG-Verfahren zur Lösung des Gleichungssystems, das beim Differenzenverfahren für das Poisson-Problem auf $\Omega = (0, 1) \times (0, 1)$ auftritt. Hierbei soll keine Matrix assembliert werden, stattdessen soll eine zum Differenzenverfahren passende Matrix-Vektor-Multiplikation realisiert werden. Überprüfen Sie das CG-Verfahren, indem Sie Ihre Ergebnisse mit den Ergebnissen aus dem letzten Projekt vergleichen.

Aufgabe 6.2

Modifizieren Sie die Matrix-Vektor-Multiplikation aus Aufgabe 6.1 so, dass eine Näherungslösung für das Poisson-Problem mit homogenen Randdaten $u_D \equiv 0$ auf dem L-Gebiet $\Omega = (0, 1)^2 \setminus (0, 0.5]^2$ berechnet wird. Setzen Sie hierzu die Werte des Ergebnisvektors für die Punkte aus $[0, 0.5]^2$ auf 0. Stellen Sie Ihre Ergebnisse grafisch dar.

Aufgabe 6.3

Für die Lösung u des Poisson-Problems und die Lösung u_h der Fünfpunktformel-Diskretisierung gelte:

$$\forall m \geq 0 : u(x) - u_{h/2^m}(x) = C(x)(h/2^m)^{\alpha(x)},$$

wobei x ein Gitterpunkt des Gitters mit Maschenweite h und $C(x), \alpha(x) \in \mathbf{R}$ ist.

(a) Warum ist diese Annahme näherungsweise erfüllt?

(b) Zeigen Sie:

$$u_h(x) - u_{h/2}(x) = C(x)h^{\alpha(x)}(1 - (1/2)^{\alpha(x)})$$

(c) Zeigen Sie:

$$\frac{u_h(x) - u_{h/2}(x)}{u_{h/2}(x) - u_{h/4}(x)} = 2^{\alpha(x)}$$

(d) Berechnen Sie $\alpha(x)$, $C(x)$ und $C(x)h^{\alpha(x)}$ für alle Gitterpunkte bei dem Differenzenverfahren auf dem Einheitsquadrat und dem L-Gebiet. Hierbei soll $f \equiv 1$ gesetzt werden. Stellen Sie die Ergebnisse für verschiedene Maschenweiten grafisch dar und interpretieren Sie sie.

Welche Werte für $\alpha(x)$ sind für das Einheitsquadrat zu erwarten?