Prof. Dr. C. Carstensen, JProf. Dr. A. Schröder Sommersemester 2008

Übung zur Vorlesung

Numerik partieller Differentialgleichungen II

Blatt 1

Aufgabe 1. Auf dem Einheitsquadrat $\Omega := (0,1)^2$ betrachte wir die Randwertaufgabe

$$\begin{aligned} -\Delta u - 25u &= f \quad \text{in } \Omega\,,\\ u &= 0 \quad \text{auf } \partial\Omega\,. \end{aligned}$$

(a) Geben Sie eine schwache Formulierung an.

(b) Es ist bekannt (woher?), dass $\int_\Omega |\nabla v|^2\,dx \geq 2\pi^2 \int_\Omega |v|^2\,dx$ für $v \in H_0^{1,2}(\Omega)$, wobei für $v = \sin(\pi x)\cdot\sin(\pi y)$ sogar die Gleichheit gilt. Schließen Sie daraus, dass die Bilinearform zu dem gegebenen Problem nicht $H_0^{1,2}(\Omega)$-elliptisch ist.

(c) Zeigen Sie, dass es ein $\beta > 0$ gibt, so dass gilt

$$\beta\|v\|_{1,2} \leq \sup_{w\in H_0^{1,2}(\Omega)\setminus\{0\}} \frac{a(v,w)}{\|w\|_{1,2}} \quad \text{für alle } v \in H_0^{1,2}(\Omega)\,.$$

Was folgt daraus für die eindeutige Lösbarkeit der Randwertaufgabe?

Aufgabe 2. Es sei V ein Hilbertraum und $a : V \times V \to \mathbb{R}$ eine stetige Bilinearform sowie $A : V \to V^*$ der Operator mit $\langle A(w), v\rangle := a(w,v)$ für $v, w \in V$. Wir definieren $\mathrm{rg}(A) := \{A(v) \mid v \in V\}$. Zudem seien $V_i \subset V$ für $i \in \mathbb{N}$ Teilräume mit $\dim V_i < \infty$ sowie $A_i : V_i \to V_i^*$ mit $\langle A_i(\cdot), v\rangle := a(\cdot, v)$ für $v \in V_i$, und es gelte:

(i) Es gibt ein $\varepsilon > 0$, so dass $\inf\limits_{u\in V_i,\,\|u\|=1}\ \sup\limits_{v\in V_i,\,\|v\|=1} |a(u,v)| = \varepsilon$ für alle $i \in \mathbb{N}$.

(ii) $\lim\limits_{i\to\infty}\ \inf\limits_{w\in V_i} \|v - w\| = 0$ für alle $v \in V$.

Zeigen Sie:

(a) Für alle $i \in \mathbb{N}$ existiert $A_i^{-1} \in L(V_i^*, V_i)$.

(b) Mit der Stetigkeitskonstante $\nu_0 > 0$ gilt $\|u - A_i^{-1}(\ell)\| \leq (1 + \nu_0/\varepsilon) \inf\limits_{w\in V_i} \|u - w\|$ für alle $\ell \in \mathrm{rg}(A)$ und für alle $u \in A^{-1}(\ell)$.

(c) Für alle $\ell \in \mathrm{rg}(A)$ existiert genau ein $u \in V$, so dass $A(u) = \ell$ ist, und es gilt $\lim\limits_{i\to\infty} \|u - u_i\| = 0$.

(d) $\mathrm{rg}(A)$ ist abgeschlossen in V^* und $\mathrm{rg}(A) = V^*$.

Geben Sie ein Beispiel für V und die Teilräume V_i an, so dass (ii) erfüllt ist.

Aufgabe 3.
Betrachtet wird die eindimensionale Randwertaufgabe

$$-u'' = g, \quad u(0) = u(1) = 0.$$

Es sei u_h die Lösung des diskreten Problems unter Verwendung von linearen Finiten Elemente. Den Basisfunktionen seien die Knoten x_i zugeordnet. Ferner seien $y_{2i+1} := (x_i + x_{i+1})/2$ und $y_{2i} := x_i$. Mit den zu y_i gehörenden Basisfunktionen ψ_i sei

$$\eta^2 := \sum_{i=0}^{2m} \eta_i, \quad \eta_i := \sup_{v \in H_0^1(0,1)} \frac{(u - u_h, \psi v)_1}{|\psi_i v|_1},$$

mit $(v, w)_1 := (v', w')_0$ und $|v|_1 := (v, v)_1^{1/2}$. Zeigen Sie:

(a) Es gibt ein $C > 0$, so dass $|u - u_h|_{1,2} \le C\eta$.

(b) Es sei z die Lösung der lokalen Randwertaufgabe

$$-z'' = g, \quad z(y_{i-1}) = u_h(y_{i-1}),\ z(y_i) = u_h(y_i)\,.$$

Dann ist

$$\eta_i^2 = \int_{y_{i-1}}^{y_i} ((z - u_h)')^2 \, dx.$$

Was ist aus praktischer Sicht zu tun, um aus (b) einen berechenbaren a posteriori Fehlerschätzer herzuleiten?

Abgabe: 22.4.08 vor der Vorlesung