Übung zur Vorlesung

Numerik partieller Differentialgleichungen II

Blatt 2

Aufgabe 1. Betrachten Sie das Anfangswertproblem für die Wärmeleitungsgleichung

$$\begin{aligned} u_t - \Delta u &= 0 && \text{in } \mathbb{R}^d \times (0,T), \\ u(x,0) &= u_0(x) && \text{für alle } x \in \mathbb{R}^d. \end{aligned}$$

Die *Fundamentallösung* der Wärmeleitungsgleichung ist definiert als $\Phi(x,t) := \frac{1}{(4\pi t)^{d/2}} e^{-\frac{|x|^2}{4t}}$.

a) Zeigen Sie, dass für jedes $t > 0$ gilt $\int_{\mathbb{R}} \Phi(x,t)\,dx = 1$.

b) Zeigen Sie, dass $\Phi(x,t)$ die Wärmeleitungsgleichung erfüllt.

c) Zeigen Sie, dass die Faltung der Fundamentallösung mit Anfangswerten

$$u(x,t) = \Phi(x,t) * u_0(x) := \int_{\mathbb{R}} \Phi(x-y,t)\, u_0(y)\, dy$$

die Wärmeleitungsgleichung $u_t - u_{xx} = 0$ in $\mathbb{R} \times (0,T)$ erfüllt.

d) Zeigen Sie, dass die so definierte Lösung $u(x,t)$ für $t = 0$ auch die Anfangswerte $u_0(x)$ annimmt, falls u_0 als stetig vorausgesetzt wird.

Hinweis: Die Aussage in d) läßt sich verallgemeinern. Zum Nachweis ist die Transformation $\eta = \frac{y-x}{\sqrt{4t}}$ nützlich.

Aufgabe 2. **a)** Betrachten Sie das Anfangs- Randwertproblem auf dem Halbraum

$$\begin{aligned} u_t - u_{xx} &= 0 && \text{in } (0,\infty) \times (0,T), \\ u(x,0) &= u_0(x) && \text{für alle } x > 0, \\ u(0,t) &= 0 && \text{für alle } t \in (0,T). \end{aligned}$$

Bestimmen Sie eine Lösung durch geeignete Fortsetzung der Anfangswerte auf $\mathbb{R}$.

b) Ändern Sie die Randbedingung auf $u_x(0,t) = 0$ für alle $t \in (0,T)$ und geben Sie eine Lösung des Anfangs- Randwertproblems an.

Aufgabe 3. Betrachten Sie das Anfangswertproblem für die Wärmeleitungsgleichung

$$\begin{aligned} u_t - \Delta u &= 0 && \text{in } \mathbb{R}^d \times (0,T), \\ u(x,0) &= u_0(x) && \text{für alle } x \in \mathbb{R}^d. \end{aligned}$$

a) Zeigen Sie, dass die Wärmeleitungsgleichung eine Glättungseigenschaft besitzt, d.h. dass für $t > 0$ beliebige Ableitungen in Zeit- und Raumrichtung beschränkt sind, wobei die Anfangswerte als stetig angenommen werden. Warum dürfen Integration und Differentiation vertauscht werden?

b) Zeigen Sie, dass für stetige Anfangswerte mit $\int_{\mathbb{R}^d} |u_0(x)|\,dx < \infty$ gefolgert werden kann

$$\int_{\mathbb{R}^d} u(x,t)\,dx = \int_{\mathbb{R}^d} u_0(x)\,dx \qquad \text{für alle } t \geq 0\,.$$

Abgabe: 29.4.08 vor der Vorlesung