Übung zur Vorlesung

# Numerik partieller Differentialgleichungen II

**Blatt 3**

**Aufgabe 1.** Gegeben sei das Anfangs- Randwertproblem

$$\begin{aligned} u_t - u_{xx} &= 0 && \text{in } (0,1) \times (0,T) \\ u(0,t) = u(1,t) &= 0 && \text{für alle } t \in (0,T), \end{aligned}$$

zusammen mit den Anfangswerten $u(x,0) = 1 - 2\left|x - \frac{1}{2}\right|$ für alle $x \in (0,1)$.
**a)** Lösen Sie das Anfangs- Randwertproblem mittels *Separation der Variablen.* Bestimmen Sie die Koeffizienten $(b_j)_{j=1,2,\dots}$, so dass $u(x,t) = \sum_{j=1}^{\infty} b_j u^{(j)}(x,t)$ mit $u^{(j)}(x,t) = X_j(x)T_j(t)$ für $j = 1, 2, \dots$ gilt.
**b)** Es sei $T > 0$ gegeben. Untersuchen Sie die Konvergenz der Reihe $\sum_{j=1}^{\infty} b_j X_j(x) T_j(t)$ zu den festen Zeiten $t = T$ und $t = -T$.

**Aufgabe 2.** Es seien $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ ein beschränktes Gebiet, $T > 0$, und $u_0 \in L^2(\Omega)$. Weiter sei $f : \Omega \times [0,T] \to \mathbb{R}$, so dass $f(\cdot,t)$ und $D_t f(\cdot,t)$ in der $L^2$-Norm beschränkt sind. Betrachten Sie das Anfangs- Randwertproblem

$$\begin{aligned} u_t - \Delta u &= f && \text{in } \Omega \times (0,T), \\ u(x,0) &= u_0(x) && \text{für alle } x \in \Omega, \\ u(\cdot,t) &= 0 && \text{auf } \partial\Omega \times (0,T). \end{aligned}$$

**a)** Zeigen Sie, dass eine Lösung als Superposition von Lösungen der homogenen Gleichung dargestellt werden kann (*Duhamel-Prinzip*), d.h. mit dem Lösungsoperator $E$ der homogenen Gleichung gilt

$$u(t) = E(t)u_0 + \int_0^t E(t-s) f(s)\, ds\,.$$

**Hinweis:** Zeigen Sie, dass mit $E$ auch $F(t) := \int_0^t E(t-s) f(s)\, ds$ die Wärmeleitungsgleichung erfüllt. Beachten Sie bei der Differentiation, dass sowohl der Integrand, als auch die Integrationsgrenzen von $t$ abhängen und nutzen Sie $\|f(\cdot,t) - f(\cdot,s)\| \le C|t-s|$.
**b)** Warum genügt es nicht, $f(\cdot,t) \in L^2(\Omega)$ für $t \in (0,T)$ anzunehmen?
**c)** Zeigen Sie die Stabilitätsabschätzung

$$\|u(t)\| \le \|u_0\| + \int_0^t \|f(s)\|\, ds$$

und folgern Sie Eindeutigkeit der Lösung und die stetige Abhängigkeit von den Daten.

**Aufgabe 3.** Es sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ ein beschränktes Gebiet und $T > 0$, und $u_0 \in H_0^1(\Omega)$. Betrachten Sie das Anfangs- Randwertproblem

$$\begin{aligned} u_t - \Delta u &= 0 && \text{in } \Omega \times (0,T), \\ u(x,0) &= u_0(x) && \text{für alle } x \in \Omega, \\ u(\cdot,t) &= 0 && \text{auf } \partial\Omega \times (0,T) \end{aligned}$$

und zeigen Sie die Ungleichung

$$|u(\cdot,t)|_1 \le |u_0|_1 \qquad \text{für } t \in (0,T)\,.$$

**Abgabe:** 6.5.08 vor der Vorlesung