Übung zur Vorlesung

Numerik partieller Differentialgleichungen II

Blatt 4

Aufgabe 1. Betrachten Sie das Anfangs- Randwertproblem

$$\begin{aligned} u_t - Lu &= f && \text{in } \Omega \times (0,T), \\ u(x,0) &= u_0(x) && \text{für alle } x \in \Omega, \\ u(\cdot,t) &= 0 && \text{auf } \partial\Omega \times (0,T). \end{aligned}$$

Dabei sei L ein elliptischer Operator, der durch L_h so diskretisiert sei, dass für den örtlichen Abscheidefehler $|\tau_h^m| = |L\, u^m - L_h\, u^m| \leq C\, h^2 M_4^m(u)$ gilt. Zeigen Sie folgende Abschätzungen für den Konsistenzfehler $\tau_{h,k}^m$:

a) Für das Crank-Nicolson-Verfahren $k^{-1}(u^m - u^{m-1}) + \frac{1}{2}L_h(u^m + u^{m-1}) = \frac{1}{2}(f^m + f^{m-1})$ gilt

$$\max_{\Omega\times(0,T)} |\tau_{h,k}^m| \leq \max_{\Omega\times(0,T)} |\tau_h^m| + \frac{1}{12}k^2 \max_{\Omega\times(0,T)} |\partial_t^3 u|\,.$$

b) Für das BDF(2)-Verfahren-Verfahren $\frac{1}{2}k^{-1}(3u^m - 4u^{m-1} + u^{m-2}) + L_h u^m = f^m$ gilt

$$\max_{\Omega\times(0,T)} |\tau_{h,k}^m| \leq \max_{\Omega\times(0,T)} |\tau_h^m| + \frac{2}{3}k^2 \max_{\Omega\times(0,T)} |\partial_t^3 u|\,.$$

Aufgabe 2. Betrachten Sie das oben gegebene Anfangs- Randwertproblem, wobei nun L als selbstadjungiert vorausgesetzt wird.

a) Der Anfangswert u_0 sei durch die Eigenfunktion gegeben, die zum größten Eigenwert Λ des diskretisierten Operators gehört. Dabei ist $\Lambda \sim h^{-2}$. Stellen Sie das Abklingverhalten der diskreten Lösung bei Verwendung des Crank-Nicolson-Verfahren dar, wenn k so gewählt wird, dass $k\Lambda < 2$, was $k \sim h^2$ entspricht, und wenn k so gewählt wird, dass $k\Lambda = 4/h$, was $k \sim h$ entspricht.

b) Der erste Zeitschritt des Crank-Nicolson-Verfahren werde durch zwei Schritte des impliziten Euler-Verfahrens mit der halben Schrittweite ersetzt. Zeigen Sie die folgende Gleichheit für den Fehler des resultierenden Verfahrens

$$\|U_h^m - U_h(t_m)\|^2 = \sum_{n=1}^{N} \alpha_n^2 \left[e^{-(m-1)z_n} \left(e^{-z_n/2} + \frac{1}{1+z_n/2} \right) \left(e^{-z_n/2} - \frac{1}{1+z_n/2} \right) + T \right]^2,$$

wobei

$$T := \left(\frac{1}{1+z_n/2}\right)^2 \left(e^{-z_n} - \frac{1-z_n/2}{1+z_n/2} \right) \sum_{\mu=0}^{m-2} e^{-\mu z_n} \left(\frac{1-z_n/2}{1+z_n/2}\right)^{m-2-\mu}$$

und $z_n := k\lambda_n$. Mit α_n seien die Koeffizienten der Entwicklung des Anfangswertes nach den Eigenfunktionen mit zugehörigen Eigenwerten λ_n bezeichnet.

c) Es sei $0 \leq z_n \leq 2$. Zeigen Sie, dass es ein $C > 0$ gibt, so dass $\|U_h^m - U_h(t_m)\| \leq C\frac{1}{m^2}\left(\sum_{n=1}^N \alpha_n^2\right)^{\frac{1}{2}}$. Zeigen Sie dazu $\frac{1-z_n/2}{1+z_n/2} \leq e^{-z_n/2}$ und benutzen Sie $\left|e^{-z} - \frac{1-z/2}{1+z/2}\right| \leq C\frac{z^3}{1+z/2}$ für $z \geq 0$.

d) Es sei $z_n > 2$. Zeigen Sie, dass es ein $C > 0$ gibt, so dass $\|U_h^m - U_h(t_m)\| \leq C\frac{1}{m^2}\left(\sum_{n=1}^N \alpha_n^2\right)^{\frac{1}{2}}$. Zeigen Sie dazu $|\frac{1-z_n/2}{1+z_n/2}| \leq e^{-2/z_n}$ und benutzen Sie $\left|e^{-z} - \frac{1}{1+z}\right| \leq C\frac{z^2}{1+z}$ für $z \geq 0$.

e) Folgern Sie insgesamt $\|U_h^m - U_h(t_m)\| \leq C\frac{k^2}{t_m^2}\|u_h^0\|$, also dass das mit zwei impliziten Euler-Schritten gedämpfte Verfahren die Glättungseigenschaft besitzt.

Abgabe: 13.5.08 vor der Vorlesung