Übung zur Vorlesung

Numerik partieller Differentialgleichungen II

Blatt 5

Aufgabe 1. Zeigen Sie, dass das Crank-Nicolson-Verfahren für die Wärmeleitungsgleichung nicht stark A-stabil ist.

Aufgabe 2. (θ-Zwischenschrittverfahren) Der selbstadjungierte elliptische lineare Operator L sei durch die Matrix $A_h \in \mathbb{R}^{N\times N}$ approximiert und $d_t U_h = AU_h + F$ das aus der Anwendung der Linienmethode resultierende System gewöhnlicher Differentialgleichungen. Es sei $\alpha \in (1/2, 1]$. Jeder Zeitschritt werde in die folgenden Teilschritte zerlegt:

$$\begin{aligned}
(I + \alpha\theta k A_h)\, U_h^{m+\theta} &= (I - \beta\theta A_h) k\, U_h^{m}\,, \\
(I + \beta(1-2\theta) k A_h)\, U_h^{m+1-\theta} &= (I - \alpha(1-2\theta) A_h) k\, U_h^{m+\theta}\,, \\
(I + \alpha\theta k A_h)\, U_h^{m+1} &= (I - \beta\theta A_h) k\, U_h^{m+1-\theta}\,.
\end{aligned}$$

a) Zeigen Sie, dass das Verfahren durch

$$R_\theta(z) = \frac{(1+\alpha(1-2\theta)z)(1+\beta\theta z)^2}{(1-\alpha\theta z)^2(1+\beta(1-2\theta)z)}$$

beschrieben werden kann.
b) Geben Sie eine notwendige Bedingung für β an, damit das Verfahren konsistent ist (mit Ordnung ≥ 1). Geben Sie eine Bedingung für θ zum Erreichen der Konsistenzordnung 2 an.
c) Zeigen Sie die starke A-Stabilität des θ-Zwischenschrittverfahrens.

Aufgabe 3. (von Neumann Stabilität) Das Anfangs- Randwertproblem

$$\begin{aligned}
u_t - u_{xx} &= 0 && \text{in } [0,\pi], \\
u(x,0) &= u_0(x) && \text{für alle } x \in [0,\pi], \\
u(0,t) = u(\pi,t) &= 0
\end{aligned}$$

hat Lösungen der Form $u(x,t) = \sum_{\mu=1}^{\infty} a_\mu \sin(\mu\xi)\, e^{-\omega^2 t}$. Das Intervall $[0,\pi]$ werde uniform unterteilt mit den Stützstellen $x_n = n\,h$, $n = 0,\cdots,N$, $h = \pi/N$. Die Stabilität eines Diskretisierungsverfahren für das Anfangs- Randwertproblem kann durch den analogen Lösungsansatz $U_n^m := \sum_{\mu=1}^{N} a_\mu \sin(\mu\xi)\, \lambda_\mu^m$, mit $\xi := n\,h$, untersucht werden. Für ein stabiles Verfahren muss $|\lambda_\mu| \leq 1$ für alle μ und alle $n \in \{1,\cdots,N\}$ gelten.
Leiten Sie daraus eine für Stabilität notwendige Bedingung an die Orts- und Zeitschrittweite des expliziten Eulervefahrens her.

Abgabe: 20.5.08 vor der Vorlesung