Übung zur Vorlesung

Numerik partieller Differentialgleichungen II

Blatt 6

Aufgabe 1. (Inverse Monotonie) Bei nicht-negativen Anfangswerten und rechter Seite bleibt die Lösung der Wärmeleitungsgleichung für alle Zeiten nicht-negativ. Zeigen oder widerlegen Sie, dass sich diese Eigenschaft jeweils auf die diskrete Lösung überträgt, wenn das explizite Euler-Verfahren, das implizite Euler-Verfahren oder das Crank-Nicolson-Verfahren angewendet wird.
Hinweis: An geeigneter Stelle läßt sich mit der M-Matrix-Eigenschaft argumentieren.

Aufgabe 2. Betrachten Sie das Anfangs- Randwertproblem

$$\begin{aligned} u_t - Lu &= 0 && \text{in } \Omega \times (0,T), \\ u(x,0) &= u_0(x) && \text{für alle } x \in \Omega, \\ u(\cdot,t) &= 0 && \text{auf } \partial\Omega \times (0,T). \end{aligned}$$

Dabei sei L ein selbstadjungierter elliptischer Operator, der durch L_h, bzw. $A_h \in \mathbb{R}^{N\times N}$, approximiert sei. Zeigen Sie, dass die diskrete Lösung eine Darstellung der Form

$$U_h^m = \sum_{n=1}^{N} \alpha_n W_n R(-k\lambda_n)^m$$

besitzt, wobei die α_n reelle Koeffizienten sind, $W_n : \Omega_h \to \mathbb{R}$, $\lambda_n \in \mathbb{R}$ und $R(-k\lambda_n)$ die verwendete Padé-Formel mit der Zeitschrittweite k darstellt.

Abgabe: 27.5.08 vor der Vorlesung