Prof. Dr. C. Carstensen, JProf. Dr. A. Schröder Sommersemester 2008

Übung zur Vorlesung

# Numerik partieller Differentialgleichungen II

## Blatt 7

**Aufgabe 1.** Diskutieren Sie die Äquivalenz der parabolischen Anfangs-Randwertaufgabe

$$\begin{aligned} u_t - \Delta u &= f && \text{in } \Omega \times I, \\ u(x,0) &= u_0(x) && \text{für alle } x \in \Omega, \\ u(\cdot,t) &= 0 && \text{auf } \partial\Omega \times I \end{aligned}$$

zu der Formulierung: für beliebige in der Zeit stetige Testfunktionen gilt

$$\sum_{\mu=1}^{m} \int_{I_\mu} (\partial_t u, \varphi) + (\nabla u, \nabla \varphi)\, dt + ([u]^{\mu-1}, \varphi^{(\mu-1)+}) = (\varphi^{m+}, \chi) + \int_I (f, \varphi)\, dt\,.$$

**Aufgabe 2.** Betrachten Sie für die Wärmeleitungsgleichung das „duale Problem“

$$\begin{aligned} -z_t - \Delta z &= \psi && \text{in } \Omega \times I, \\ z(x,t_m) &= \chi(x) && \text{für alle } x \in \Omega, \\ z(\cdot,t) &= 0 && \text{auf } \partial\Omega \times I. \end{aligned}$$

**a)** Leiten Sie aus der semi-variationellen Formulierung und der Vorschrift $z^{m+} = \chi$ für die Anfangswerte her, dass für beliebige in der Zeit stetige Testfunktionen $\varphi$ gilt

$$\sum_{\mu=1}^{m} \int_{I_\mu} (\partial_t \varphi, z) + (\nabla \varphi, \nabla z)\, dt + ([\varphi]^{\mu-1}, z^{(\mu-1)+}) = (\varphi^{m+}, \chi) + \int_{[0,t_m]} (\varphi, \psi)\, dt\,.$$

**b)** Es sei $u$ eine Lösung des Anfangs- Randwertproblems für die Wärmeleitungsgleichung und $U_h$ eine Approximation daran. Zeigen Sie die allgemeine Fehleridentität für $e_h := U_h - u$

$$(e_h^{m+}, \chi) + \int_{[0,t_m]} (e_h, \psi)\, dt = \sum_{\mu=1}^{m} \int_{I_\mu} (\partial_t e_h, z - z_h) + (\nabla e_h, \nabla(z - z_h))\, dt + ([e_h]^{\mu-1}, (z - z_h)^{(\mu-1)+})\,,$$

wobei $z_h(\cdot,t) \in V_h$ eine beliebige Approximation an die duale Lösung $z$ sei.
**Hinweis:** Leiten Sie die Galerkin-Orthogonalität für den Fehler $e_h$ her.

**Aufgabe 3.** Betrachten Sie das Anfangs- Randwertproblem für die Wellengleichung

$$\begin{aligned} u_{tt} - \Delta u &= 0 && \text{in } \Omega \times (0,T), \\ u(x,0) = u_0(x), \quad \partial_t u(x,0) &= v_0(x) && \text{für alle } x \in \Omega, \\ u(\cdot,t) &= 0 && \text{auf } \partial\Omega \times (0,T). \end{aligned}$$

**a)** Zeigen Sie die Energieerhaltung $\|\partial_t u\|^2 + \|\nabla u\|^2 = \|v_0\|^2 + \|\nabla u_0\|^2$.
**b)** Die Anwendung des Crank-Nicolson-Verfahren ergibt

$$\begin{aligned} \left(u^m - u^{m-1}, \psi\right) - \tfrac{1}{2} k_m \left(v^m - v^{m-1}, \psi\right) &= 0 \\ \left(v^m - v^{m-1}, \varphi\right) - \tfrac{1}{2} k_m \left(\nabla(u^m - u^{m-1}), \nabla\varphi\right) &= 0 \end{aligned}$$

Zeigen Sie, dass auch nach dieser Diskretisierung die Energieerhaltung weiterhin gilt, d. h.

$$\|v^m\|^2 + \|\nabla u^m\|^2 = \|v_0\|^2 + \|\nabla u_0\|^2\,.$$

**Abgabe:** 27.5.08 vor der Vorlesung