Prof. Dr. C. Carstensen, JProf. Dr. A. Schröder Sommersemester 2008

Übung zur Vorlesung

Numerik partieller Differentialgleichungen II

Blatt 8

Aufgabe 1. Betrachten Sie ein elastisches (objektives) Material mit der Antwortfunktion $\widehat{T}$ und $\widehat{\Sigma}$ der Antwortfunktion für den Piola-Kirchhoffschen Spannungstensor. Es sei $F \in M^3_+$.
a) Zeigen Sie, dass für jede durch $Q \in O^3_+$ beschriebene orthogonale Transformation gilt

$$\widehat{T}(Q\,F) = Q\widehat{T}(F)Q^T\,.$$

b) Zeigen Sie, dass es $\widetilde{\Sigma} : S^3_> \to S^3 : \widehat{\Sigma}(F) = \widetilde{\Sigma}(F^T F)$ gibt.

Aufgabe 2. Für ein isotropes elastisches (objektives) Material seien $\widehat{\Sigma}$ die Antwortfunktion für den Piola-Kirchhoffschen Spannungstensor und $C = \nabla\phi^T\nabla\phi$ der Cauchy-Greensche Verzerrungstensor. Zeigen Sie

$$\widetilde{\Sigma}(C) = \gamma_0 I + \gamma_1 C + \gamma_2 C^2\,,$$

wobei $\gamma_0, \gamma_1, \gamma_2$ Funktionen der Invarianten von C sind.
Hinweis: Leiten Sie mit dem Satz von Caylay-Hamilton die Form $\bar{T}(B) = \beta_1 B + \beta_2 B^2 + \beta_3 B^3$ mit Koeffizienten $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ her, wobei $\bar{T}$ durch die Beziehung $\widehat{T}(F) = \bar{T}(F\,F^T)$ mit der Antwortfunktion verbunden ist.

Aufgabe 3. Betrachten Sie ein hyperelastisches Material mit der Antwortfunktion $\widehat{T}$ und dem Energiefunktional $\widehat{W}$. Der Cauchy-Greensche Verzerrungstensor habe die Form $C = I + 2E$.
a) Zeigen Sie, dass es ein Funktional $\widetilde{W} : S^3_> \to \mathbb{R}$ gibt, so dass $\widehat{W}(F) = \widetilde{W}(F^T F)$ und dass es Konstanten λ, μ gibt, so dass für des Energiefunktional gilt

$$\widetilde{W}(C) = \frac{\lambda}{2}(\operatorname{spur} E)^2 + \mu E : E + o(E^2)\,.$$

b) Betrachten Sie die Linearisierung $C = I + 2\varepsilon$ des Cauchy-Greensche Verzerrungstensors. Es sei weiterhin $\sigma := \frac{\mathsf{E}}{1+\nu}(\varepsilon + \frac{\nu}{1-2\nu}\operatorname{spur}\varepsilon\, I)$. Zeigen Sie, dass $\widetilde{W}(C) = \sigma : \varepsilon$.

Abgabe: 11.6.08 vor der Vorlesung