Übung zur Vorlesung

Numerik partieller Differentialgleichungen II

Blatt 9

Im Folgenden sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet mit polygonalem Lipschitz-Rand.

Aufgabe 1. Man bestimme die *inf-sup-Konstante* zu der Bilinearform $a : X \times X \to \mathbb{R}$, mit

$$
\begin{aligned}
(p,u),(q,v) &\in X := L^2(\Omega)^n \times H_0^1(\Omega),\\
a\left((p,u),(q,v)\right) &:= \int_\Omega (p\cdot q - p\cdot\nabla v - q\cdot\nabla u)\,\mathrm{dx}.
\end{aligned}
$$

Aufgabe 2. Man bestimme die λ-unabhängige *inf-sup-Konstante* zu der Bilinearform $\mathcal{B}$ mit

$$
\begin{aligned}
(\sigma,u),(\tau,v) \in& X := L^2(\Omega,\mathbb{R}^{n\times n}_{\mathrm{sym}})/\mathbb{R} \times H_0^1(\Omega)^n,\\
\mathcal{B}\left((\sigma,u),(\tau,v)\right) :=& \int_\Omega \sigma : \mathbb{C}^{-1}\tau - \sigma : \varepsilon(v) - \tau : \varepsilon(u)\mathrm{dx},
\end{aligned}
$$

wobei für Materialkonstanten $\mu,\lambda \in \mathbb{R}$ der Raum $L^2(\Omega,\mathbb{R}^{n\times n}_{\mathrm{sym}})/\mathbb{R}$ und die Operatoren $\mathbb{C},\varepsilon$ defeniert sind als

$$
\begin{aligned}
\tau \in L^2(\Omega,\mathbb{R}^{n\times n}_{\mathrm{sym}})/\mathbb{R} \Leftrightarrow& \tau \in L^2(\Omega,\mathbb{R}^{n\times n}_{\mathrm{sym}}) \ \& \int_\Omega \mathrm{tr}\tau\mathrm{dx} = 0,\\
\mathbb{C}A :=& \lambda\mathrm{tr}(A)\mathrm{id} + 2\mu A \qquad \text{für} A \in \mathbb{R}^{n\times n}_{\mathrm{sym}},\\
\varepsilon(\cdot) =& \mathrm{sym}\,\mathrm{D}\cdot.
\end{aligned}
$$

Aufgabe 3. (Diskrete Helmholtz-Zerlegung) Für eine reguläre Triangulierung $\mathcal{T}_\ell$ mit inneren Kanten $\mathcal{E}_\ell$, definieren wir die Räume

$$
\begin{aligned}
V_\ell^c :=& V(\mathcal{T}_\ell) = P^1(\mathcal{T}_\ell) \cap H_0^1(\Omega),\\
V_\ell^{\mathrm{NC}} :=& P_1^{\mathrm{NC}}(\mathcal{T}_\ell) := \left\{ b_\ell \in P^1(\mathcal{T}_\ell) | \forall E \in \mathcal{E}_\ell : b_\ell \text{ ist stetig im Punkt mid}(E)\right\}.
\end{aligned}
$$

Man Zeige

$$
P_0(\mathcal{T}_\ell)^2 = \mathrm{D}V_\ell^c \oplus \mathrm{curl}_\ell\, V_\ell^{\mathrm{NC}}/\mathbb{R},
$$

d.h. für alle $p_\ell \in P_0(\mathcal{T})^2$ ex. eindeutige $(a_\ell, b_\ell) \in V_\ell^c \times V_\ell^{\mathrm{NC}}$ mit

$$
p_\ell = \mathrm{D}\,a_\ell + \mathrm{curl}_\ell\, b_\ell
$$

und $\mathrm{D}\,V_\ell^c \perp \mathrm{curl}_\ell(V_\ell^{\mathrm{NC}}/\mathbb{R})$.

Abgabe: 3.7.08 vor der Vorlesung